

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

ESCOAMENTO LAMINAR EM PLACAS DE ORIFÍCIO - ANÁLISE TEÓRICA
E EXPERIMENTAL EM REGIME PERMANENTE E TRANSIENTE

TESE SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA PARA
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA

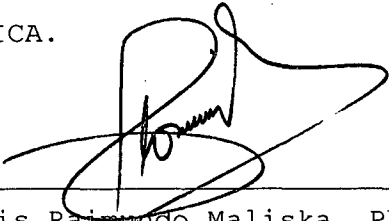
RAMÓN MOLINA VALLE

Florianópolis, fevereiro de 1995

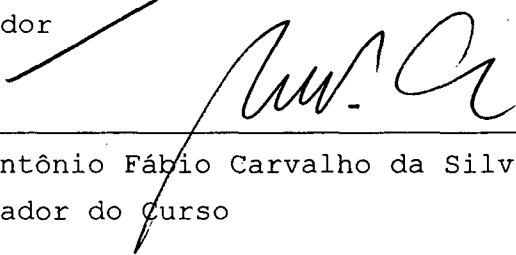
ESCOAMENTO LAMINAR EM PLACAS DE ORIFÍCIO - ANÁLISE TEÓRICA
E EXPERIMENTAL EM REGIME PERMANENTE E TRANSIENTE

RAMÓN MOLINA VALLE

ESTA TESE FOI JULGADA ADEQUADA PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM
ENGENHARIA ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA, ÁREA DE CONCENTRAÇÃO
CIÊNCIAS TÉRMICAS, APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO CURSO DE PÓS-
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA.




Prof. Clovis Raimundo Maliska, Ph.D.
Orientador

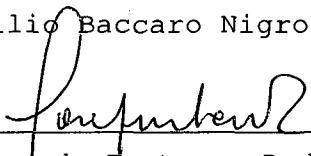


Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr.
Coordenador do Curso

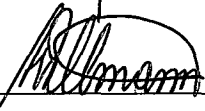
BANCA EXAMINADORA



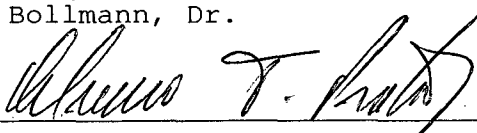
Prof. Francisco Emilio Baccaro Nigro, Ph.D.



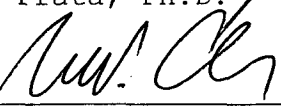
Prof. José Luiz Alves da Fontoura Rodrigues, Dr.



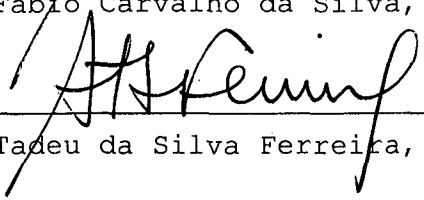
Prof. Arno Bollmann, Dr.



Prof. Álvaro Toubes Prata, Ph.D.



Prof. Antônio Fábio Carvalho da Silva, Dr.



Prof. Rogério Tadeu da Silva Ferreira, Ph.D.

À minha esposa, Heloísa,
pelo apoio, amor e carinho
e aos meus filhos, Ramón,
Rodrigo e Rafael

AGRADECIMENTOS

- Ao Professor Clovis Raimundo Maliska, pela orientação e apoio.
- Ao professor Antonio Fábio Carvalho da Silva pela colaboração e apoio na implementação do programa computacional.
- Aos meus sogros, Geraldo Andrade de Aguiar Reis e Maria Lydia Moreira Reis (in memoriam), pelo apoio e amizade.
- Aos amigos João Flávio, Carlos Henrique Marchi, Clovis Júnior, Moacir França e demais colegas do SINMEC, pela colaboração e ajuda prestada na elaboração da parte computacional deste trabalho.
- Aos Professores Arno Bollmann e Irlan Von Lisingen, por terem cedido o Laboratório de Hidráulica e Pneumática (LASHIP) para a montagem do experimento.
- Ao colega Victor Juliano de Negri e demais amigos do LASHIP, pelo apoio e colaboração na elaboração do experimento.
- Ao Professor Márcio Ziviani, Chefe do departamento de Engenharia Mecânica da UFMG, que, como colega e amigo, me deu todo apoio para a conclusão deste trabalho.
- Ao Professor Ricardo Luiz Utsch, pela valiosa ajuda no desenvolvimento do modelo analítico.
- Ao Professor Mauri Fortes, por ter cedido parte do seu laboratório de computação para a conclusão da parte computacional do trabalho.
- Ao Professor Eduardo Bauzer e a todos os colegas do DEMEC que de uma maneira ou de outra colaboraram para realização deste trabalho
- Aos amigos Henor Artur de Souza e Lígia Silva Damasceno Ferreira pela amizade sincera, convivência, apoio e colaboração.
- Aos amigos Celso Peres Fernandes, Marília e Silvia, pela amizade, convivência e sobretudo pela torcida.
- A todos os demais amigos e colegas que de uma maneira ou de outra colaboraram com a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

SIMBOLOGIA.....	ix
LISTA DE FIGURAS.....	xvi
LISTA DE TABELAS.....	xxiii
RESUMO.....	xxiv
ABSTRACT.....	xxvi
CAPÍTULOS.....	1
1 - INTRODUÇÃO.....	1
1.1 - Considerações gerais sobre medidores de vazão do tipo placa de orifício	1
1.2 - Considerações iniciais sobre escoamentos em placas de orifício	3
1.3 - Parâmetros que afetam a estrutura hidrodinâmica do escoamento em placas de orifício	6
1.4 - Revisão Bibliográfica	7
1.5 - Motivação e Contribuições	11

2 - CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA.....	14
2.1 - Introdução	14
2.2 - A Metodologia Experimental	18
2.3 - A Metodologia Analítica	21
2.4 - A Metodologia Numérica	22
2.4.1 - Equações Governantes e condições de contorno	25
3 - METODOLOGIA EXPERIMENTAL.....	30
3.1 - Descrição Geral e Funcionamento da Bancada Experimental	30
3.2 - Sistemas de Medição e Interpretação de Sinais	33
3.3 - Sistema de Geração de pulsos de vazão	36
3.3.1 - Preliminares	36
3.3.2 - O gerador de Pulsos Utilizado	40
3.3.3 - Construção do Gerador de Pulsos	42
3.3.4 - Cálculo Aproximado das Perdas devido a Vazamento de Fluido Através da folga Pistão-cilindro	44
3.4 - Sistema de Medição de Vazão	48
3.4.1 - Características do Escoamento	48
3.4.2 - As Placas de Orifício	49
3.4.3 - Tomadas de Pressão e Fixação das placas	50
3.4.4 - O Coeficiente de Compressibilidade Isotérmico	51
3.4.5 - Determinação do Coeficiente de compressibilidade efetivo	55
3.4.6 - Calibração das Placas de Orifício	58
3.4.6.1 - Calibração Estática	58
3.4.6.2 - Calibração Dinâmica	59
3.4.6.3 - Cálculo dos erros de Medição	64
3.4.6.4 - Obtenção Experimental da Razão de Amplitude e da fase entre os sinais	69

	vii
4 - MODELO ANALÍTICO.....	73
4.1 - Introdução	73
4.2 - Desenvolvimento do Modelo	77
4.3 - Comportamento do Modelo	88
5 - MODELO NUMÉRICO.....	103
5.1 - Introdução	103
5.2 - Transformação e Geração do Sistema Coordenado	104
5.3 - Transformação das Equações Governantes	106
5.3.1 - Introdução	106
5.3.2 - Transformação da Equação geral	109
5.3.3 - Transformação dos termos Fonte	110
5.4 - Obtenção das Equações Aproximadas no plano Transformado	112
5.4.1 - Aproximação da Equação Geral	112
5.4.2 - Equações Aproximadas para os termos fonte	116
5.5 - Obtenção da equação de Estado Para o Fluido de Trabalho no Modelo Compressível	118
5.6 - Método Para tratamento do Acoplamento Pressão-Velocidade e obtenção da Equação da Pressão	121
5.7 - Arranjo dos Volumes de controle e Armazenamento das variáveis	124
5.8 - Aplicação das condições de Contorno	124
5.9 - Procedimento de solução do Modelo Numérico	128
6 - VALIDAÇÃO DO PROGRAMA COMPUTACIONAL.....	130
6.1 -Validação para o regime Permanente	130
6.2 - Validação Para o Regime transiente	133

7 - RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	137
7.1 - Introdução	137
7.2 - Resultados Para o Regime Permanente	138
7.2.1 - Comentários	160
7.3 - Resultados Para o Regime transiente	163
7.3.1 - Introdução	163
7.3.2 - Resultados Analíticos X Experimentais	164
7.3.3 - Resultados Numéricos X Experimentais	175
7.3.4 - comentários	186
8 - CONCLUSÕES E RESUMO DAS CONTRIBUIÇÕES.....	189
8.1 - Conclusões	189
8.2 - Resumo das Contribuições	191
9 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	193
APÊNDICES.....	202
Apêndice A - Transformação das Equações para Coordenadas Generalizadas	202
Apêndice B - Obtenção das Equações Aproximadas	209
Apêndice C - Obtenção da Equação da Pressão	220
Apêndice D - Resultados Experimentais para as demais Placas	228

SIMBOLOGIA

a	-aceleração da massa fluida na cavidade (m/s^2)
A	-coeficiente da função estímulo
A_c	-área do cilindro (m^2)
A_D	-área da seção do duto (m^2)
A_m	-área molhada do sistema (m^2)
A_o	-área da seção do orifício (m^2)
A_z	-área da folga pistão-cilindro (m^2)
$a_p, a_c, a_n, a_s,$	
$a_{se}, a_{sw},$	-coeficientes das equações discretizadas
a_{ne}, a_{nw}	
b	-constante obtida da calibração da placa
b^p	-constante da equação de estado do fluido
c	-coeficiente que relaciona vazão com perda de pressão no orifício ou coeficiente de amortecimento mecânico, ($N.s/m$)
C	-coeficiente de amortecimento viscoso, ($N.s/m$)
C_d	-coeficiente de descarga
C_f	-coeficiente de atrito
$C_q(t)$	-coeficiente de vazão dinâmica
C_q	-coeficiente de vazão estático
C_{q_e}	-coeficiente de vazão experimental
C_{q_n}	-coeficiente de vazão numérico
C^p	-coeficiente da equação de estado linearizada
C_1, C_2, C_3, C_4	-constantes da solução da função transferência
d	-diâmetro do orifício (m)

d_1	-diâmetro interno da cavidade (m)
d_2	-diâmetro externo da cavidade (m)
d_M	-diâmetro das mangueiras utilizadas a jusante da placa (m)
D	-diâmetro interno da tubulação de acrílico (m)
D_c	-diâmetro do cilindro
DM	-dispersão da medição
dL_ξ, dL_η	-comprimentos elementares no plano físico (m)
ds	-área elementar no plano físico (m ²)
\bar{d}^u, \bar{d}^v	-coeficientes do método de acoplamento pressão-velocidade
E	-espessura da placa (m) ou módulo de Young, (N/m ²)
E_M	-erro de medição
$ E_M _{\max}$	-erro máximo na faixa de operação
E_a	-erro aleatório
E_g	-erro grosseiro
E_s	-erro sistemático
$E, W, N, S, SE,$ NE, NW, SW	-indicam os volumes de controle vizinhos ao elemento P
$F(t)$	-fonte de excitação
f	-frequência cíclica (1/s) ou fator de atrito (adimensional)
$F_c(t)$	-força amortecedora devido ao atrito viscoso nas paredes do duto (N)
$F_i(t)$	-força de inercia do sistema fluido-dinâmico (N)
$F_k(t)$	-força da mola (N)
$F_m(t)$	-força de inercia do sistema massa-mola (N)
$F_M(t)$	-força devido à resistência hidráulica das mangueiras a jusante da placa (N)
$F_{q_0}(t)$	-força devido à variação da quantidade de movimento imposta por q_0 (N)
$F_o(t)$	-força devido à resistência hidráulica do orifício (N)
$F_\beta(t)$	-força devido à compressibilidade do fluido (N)

FO	-faixa de operação
g_{ij}	-componentes do tensor métrico covariante
IM	-incerteza de medição
IRP _i	-resultado base da medição da grandeza física P _i
J	-jacobiano da transformação
J _o	-jacobiano da transformação inversa
$K = \frac{1}{\beta}$	-compressibilidade do sistema (1/Pa)
k	-coeficiente global de vazão ou constante de Hook (N/m)
kR	-raio do pistão (m)
K _o	-constante
ℓ	-comprimento de biela (m)
L	-comprimento do trecho de escoamento do cilindro ou comprimento total do sistema até o tanque de armazenamento de óleo (m)
L_e	-comprimento do duto do gerador de pulsos até a placa (m)
L_{en}	-comprimento de entrada no problema numérico (m)
L_M	-comprimento das mangueiras utilizadas a jusante da placa (m)
L_{sn}	-comprimento de saída no problema numérico (m)
L_t	-comprimento total da cavidade (m)
L_1	-curso do pistão (m)
L_2	-comprimento da redução (m)
L_o	-comprimento do orifício (m)
L_o	-comprimento mínimo de contato pistão-cilindro (m)
Ls	-deslocamento instantâneo do pistão (m)
m	-massa do bloco (kg)
M	-massa de fluido na cavidade (kg)
MM	-média das medidas
\circ	
M	-fluxo de massa
ρ m^u, m^v, b^c	-coeficientes e termo fonte da equação discretizada de conservação da massa

n	-número de medidas
$P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$	-funções de controle que regulam o espaçamento entre linhas e -pontos coordenados
P	-pressão no interior da cavidade (Pa) ou indicador de volume de controle ou probabilidade de enquadramento
P_u	-pressão estática a montante da placa (Pa)
P_{vc}	-pressão na vena contracta (Pa)
P_d	-pressão estática a jusante da placa (Pa)
P_0	-pressão do fluido no estado inicial (Pa)
P_s	-pressão na carcaça (Pa)
P^ϕ	-termo de pressão nas equações de conservação em coordenadas cilíndricas
P^*	-estimativa do campo de pressões ou campo de pressões da iteração anterior
\hat{p}^ϕ	-termo de pressão nas equações de conservação transformadas
$P', u', v', U', V', \rho'$	-correção dos campos $P^*, u^*, v^*, U^*, V^*, \rho^*$
Q	-vazão volumétrica em regime permanente (m^3/s)
Q_b	-vazão volumétrica constante enviada pela bomba (m^3/s)
Q_o	-vazão volumétrica constante que passa pelo orifício (m^3/s)
$Q(t)$	-flutuação de vazão (m^3/s)
$Q_p(t)$	-flutuação de vazão sem amortecimento (m^3/s)
$Q(s)$	-sinal de saída
$Q_z(t)$	-vazão através da folga radial pistão-cilindro (m^3/s)
$Q'(t)$	-vazão total instantânea teórica (m^3/s)
$Q_t(t)$	-vazão total instantânea real (m^3/s)
$Q_{ta}(t)$	-vazão total instantânea obtida pelo modelo analítico (m^3/s)
$Q_{te}(t)$	-vazão total instantânea obtida experimentalmente (m^3/s)
$Q_a(t)$	-flutuação de vazão amortecida (m^3/s)
Re	-número de Reynolds baseado no diâmetro da tubulação
Re_o	-número de Reynolds baseado no diâmetro do orifício

RD	-relação de diâmetros (d/D)
R_o	-raio do orifício (m)
r	-raio do excêntrico da manivela (m) ou coordenada no sistema cilíndrico
R	-raio do cilindro (m)
RM	-resultado da medição
RBP _i	-resultado base da medição da grandeza física P_i
Ra	-razão de amplitude entre o sinal de saída e o de entrada no modelo analítico
Ra_a	-razão de amplitude obtida analiticamente
RHS	-lado direito de uma equação
s	-função de Laplace
s_1, s_2	-raízes da função transferência
S	-desvio padrão ou coeficiente de solubilidade (%)
S^ϕ	-termo fonte da equação para ϕ
\hat{S}^ϕ	-termo fonte da equação transformada para ϕ
t	-tempo, (s), ou fator de Student
T	-temperatura
To	-temperatura do fluido no estado inicial
\bar{U}	-velocidade média dinâmica ou estática do escoamento (m/s)
u, v	-componentes cartesianos do vetor velocidade
U, V	-componentes contravariantes do vetor velocidade
$U^*, V^*, u^*, v^*, \rho^*$	-campos de U, V, u, v e ρ associados ao campo p^*
\vec{V}	-vetor velocidade
V_a	-volume ocupado pelo ar (m^3)
V_d	-volume de ar diluído no óleo (m^3)
V_ℓ	-volume de líquido na cavidade (m^3)
V_m	-volume de massa deslocado (m^3)
V_o	-volume de fluido no estado inicial (m^3)
V_t	-volume total de fluido na cavidade (m^3)

V_z	-velocidade instantânea do fluido através da folga radial pistão-cilindro (m/s)
V_p	-velocidade do pistão (m/s)
\bar{V}_z	-velocidade média instantânea do fluido através da folga radial pistão-cilindro (m/s)
VM	-valor da medida
VVC	-valor verdadeiro convencional
V^i	-componente contravariante do vetor velocidade
V_i	-componente covariante do vetor velocidade
x, r	-coordenadas no sistema cilíndrico
$x(t)$	-deslocamento instantâneo do pistão (m)
$X(t)$	-vazão volumétrica instantânea fornecida pelo pistão (m ³ /s)
$X(s)$	-sinal de excitação
$\dot{x}(t)$	-velocidade instantânea do pistão (m/s)
$\ddot{x}(t)$	-aceleração do pistão (m/s ²)
$x_\xi, x_\eta, r_\xi, r_\eta$	-métricas da transformação inversa de coordenadas
$y(t)$	-deslocamento amortecido do sistema (m)
$\dot{y}(t)$	-velocidade da massa fluida na saída do orifício (m/s)
$\ddot{y}(t)$	-aceleração da massa fluida no orifício (m/s ²)
w	-frequência angular (rad/s)
ξ, η	-coordenadas no sistema transformado
$\xi_x, \eta_x, \xi_r, \eta_r$	-métricas da transformação
ρ	-densidade do fluido (kg/m ³)
ρ_0	-densidade do fluido no estado inicial (kg/m ³)
α	-ângulo do chanfro da placa
α, β, γ	-componentes do tensor métrico
$\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$	-parâmetros envolvidos na função de interpolação para ϕ
β	-coeficiente de compressibilidade isotérmico efetivo (Pa)
ν	-viscosidade cinemática do fluido (m ² /s)
ν_p	-módulo de Poisson

μ	-viscosidade absoluta (kg/m.s)
γ	-coeficiente de expansão volumétrico
ϕ	-propriedade geral (ρ , u , v , p) ou ângulo formado pela biela com o eixo central do cilindro (rad)
Γ^ϕ	-coeficiente de difusão na equação de conservação generalizada
τ	-atraso da flutuação (s) ou constante de tempo (s)
τ_a	-atraso da flutuação obtido analiticamente (s)
$\tau(t)$	-tensão viscosa na parede do duto
Γ	-constante de tempo (s)
ε	-razão de amortecimento viscoso
θ	-ângulo de defasagem entre o sinal de entrada (excitação) e sinal de saída, ou ângulo de acionamento do eixo motor (rad)
ΔP	-variação de pressão no orifício para regime permanente (Pa)
$\Delta P(t)$	-variação dinâmica da pressão no orifício (Pa)
$\Delta P_e(t)$	-variação dinâmica de pressão no orifício, obtida experimentalmente (Pa)
$\Delta P_n(t)$	-variação dinâmica de pressão no orifício, obtida numericamente (Pa)
Δt	-intervalo de tempo (s)
ΔV	-volume de um volume de controle ou variação de volume na cavidade (m ³)
$\Delta \xi$, $\Delta \eta$	-dimensões dos volumes elementares no plano transformado

Subíndices

x , y , ξ , η	-derivadas parciais de 1 ^a ordem
xx , yy , $\xi\xi$, $\eta\eta$	-derivadas parciais de 2 ^a ordem
P , E , W , S ... SW	-pontos onde as variáveis são avaliadas
e , w , n , s	-pontos onde as variáveis são avaliadas

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Esquema geral do sistema dinâmico utilizado	14
Figura 2.2	Procedimento de comparação das metodologias utilizadas	17
Figura 2.3	Flutuação de ΔP na placa para uma frequência de 2,0 Hz	18
Figura 2.4	Flutuação de vazão na placa para uma frequência de 2,0 Hz	19
Figura 2.5	Domínio da solução analítica	21
Figura 2.6	Parâmetros geométricos típicos de uma placa de orifício concêntrico	22
Figura 2.7	Domínio de solução utilizado na metodologia numérica	23
Figura 3.1	Esquema geral da bancada experimental	30
Figura 3.2	Fotografia da bancada experimental	31
Figura 3.3	Cadeia de processamento dos sinais	34
Figura 3.4	Dinâmica do sistema biela-manivela	37
Figura 3.5	Sistema pistão-cilindro acionado pelo mecanismo tipo garfo escocês	40
Figura 3.6	Fotografia do gerador de pulsos de vazão	42
Figura 3.7	Compressor PW 3.5k7 e sistema modificado	43
Figura 3.8	Parâmetros físicos e geométricos envolvidos no vazamento de fluido através da folga pistão-cilindro	45
Figura 3.9	Placa convencional com aresta viva	49
Figura 3.10	Placa de entrada cônica	49
Figura 3.11	Esquema geral das tomadas de pressão e fixação das placas	51
Figura 3.12	Dispositivo para medição do coeficiente de compressibilidade efetivo	56
Figura 3.13	Valores experimentais de β efetivo nas pressões de trabalho	57
Figura 3.14	Curva de calibração da placa E1	59
Figura 3.15	Curva de calibração da placa S1	60

Figura 3.16	Curva de calibração da placa S2	60
Figura 3.17	Curva de calibração da placa S3	61
Figura 3.18	Curva de calibração da placa S4	61
Figura 3.19	Curvas de erro estático dos transdutores de pressão	68
figura 3.20	Erro percentual das placas E1, S1, S2, S3, e S4	69
Figura 3.21	Módulo e fase dos sinais de excitação e saída	70
Figura 3.22	Processo de determinação do tempo de retardo entre o sinal de excitação e saída	71
Figura 4.1	Modelo discretizado de um sistema de massa distribuída	74
Figura 4.2	Volume de controle do sistema oscilatório e sistema mecânico equivalente	77
Figura 4.3	Variação do ganho com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 2,0 Hz	89
Figura 4.4	Variação do ganho com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 6,0 Hz	90
Figura 4.5	Variação do ganho com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 10,0 Hz	90
Figura 4.6	Variação da fase com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 2,0 Hz	91
Figura 4.7	Variação da fase com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 6,0 Hz	91
Figura 4.8	Variação da fase com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 10,0 Hz	92
Figura 4.9	Comportamento do ganho com a frequência para vários valores de Q_0 e $\beta = \text{cte.}$	93
Figura 4.10	Comportamento da fase com a frequência para vários valores de Q_0 e $\beta = \text{cte.}$	93
Figura 4.11	Influência da vazão Q_0 no ganho do sistema para vários valores de β e frequência de 2,0 Hz	95
Figura 4.12	Influência da vazão Q_0 no ganho do sistema para vários valores de β e frequência de 6,0 Hz	95

Figura 4.13	Influência da vazão Q_0 no ganho do sistema para vários valores de β e frequência de 10,0 Hz	96
Figura 4.14	Influência da vazão Q_0 na fase do sistema para vários valores de β e frequência de 2,0 Hz	96
Figura 4.15	Influência da vazão Q_0 na fase do sistema para vários valores de β e frequência de 6,0 Hz	97
Figura 4.16	Influência da vazão Q_0 na fase do sistema para vários valores de β e frequência de 10,0 Hz	97
Figura 4.17	Variação do ganho com a relação de diâmetros do orifício para uma frequência de 2,0 Hz	98
Figura 4.18	Variação do ganho com a relação de diâmetros do orifício para uma frequência de 6,0 Hz	99
Figura 4.19	Variação da fase com a relação de diâmetros do orifício para uma frequência de 2,0 Hz	99
Figura 4.20	Variação da fase com a relação de diâmetros do orifício para uma frequência de 6,0 Hz.	100
Figura 4.21	Variação do ganho com o comprimento do orifício para uma frequência de 2,0 Hz.	100
Figura 4.22	Variação do ganho com o comprimento do orifício para uma frequência de 6,0 Hz.	101
Figura 4.23	Variação da fase com o comprimento do orifício para uma frequência de 2,0 Hz.	101
Figura 4.24	Variação da fase com o comprimento do orifício para uma frequência de 6,0 Hz.	102
Figura 5.1	Malha 220 x 10 para a placa E1	105
Figura 5.2	Malha 220 x 20 para a placa S4	106
Figura 5.3	Malha 220 x 20 para a placa S3	107
Figura 5.4	Malha 220 x 20 para a placa S2	107
Figura 5.5	Malha 220 x 20 para a placa S1	108
Figura 5.6	Volume de controle elementar no plano transformado	113

Figura 5.7	Volumes elementares a para discretização dos termos fonte de P^u e P^v	116
Figura 5.8	Volumes elementares a para discretização dos termos fonte de S , para u e v	117
Figura 5.9	Esquema de armazenamento das variáveis	124
Figura 5.10	Fronteira norte do domínio	125
Figura 5.11	Fronteira de entrada do domínio	126
Figura 5.12	Fronteira de saída do domínio	127
Figura 5.13	Fronteira de simetria do domínio	127
Figs 6.1	Variação do coeficiente de vazão em placas de orifício com a raiz quadrada do número de Reynolds	131
Figura 6.2	Comparação dos coeficientes de vazão numéricos com os obtidos experimentalmente	132
Figura 6.3	Perfis de velocidade para uma frequência de 0,815 Hz	134
Figura 6.4	Perfis de velocidade para uma frequência de 2.0 Hz	134
Figura 6.5	Perfis de velocidade para uma frequência de 6.0 Hz	135
Figura 6.6	Perfis de velocidade para uma frequência de 10.0 Hz	135
Figura 7.1	Determinação do domínio de saída em função da queda de pressão na placa	140
Figura 7.2	$Q_0 \times \Delta P$ para a placa E1	141
Figura 7.3	$Q_0 \times \Delta P$ para a placa S2	141
Figura 7.4	$Q_0 \times \Delta P$ para a placa S3	142
Figura 7.5	$Q_0 \times \Delta P$ para a placa S4	142
Figura 7.6	Coeficiente de vazão para a placa E1	143
Figura 7.7	Coeficiente de vazão para a placa S2	144
Figura 7.8	Coeficiente de vazão para a placa S3	145
Figura 7.9	Coeficientes de vazão numéricos	145
Figura 7.10	Coeficientes de vazão experimentais	146
Figura 7.11	Linhas de corrente para a placa E1	147
Figura 7.12	Linhas de corrente para a placa S1	148
Figura 7.13	Linhas de corrente para a placa S3	149

Figura 7.14	Linhas de corrente para a placa S4	151
Figura 7.15	Linhas de corrente para $Re = 25$	153
Figura 7.16	Linhas de corrente para $Re = 50$	154
Figura 7.17	Linhas de corrente para $Re = 250$	155
Figura 7.18	Linhas de corrente para $Re = 500$	156
Figura 7.19	Linhas de corrente para $Re = 1000$	157
Figura 7.20	Linhas de corrente para $Re = 2500$	158
Figura 7.21	Isobáricas para $Re = 1500$	159
Figura 7.22	Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido pelo modelo analítico para uma vazão de $3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	165
Figura 7.23	Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido pelo modelo analítico para uma vazão de $4,90 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	166
Figura 7.24	Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido experimentalmente para uma vazão média de $3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	167
Figura 7.25	Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido experimentalmente para uma vazão média de $4,90 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$	168
Figura 7.26	Variação do ganho com a frequência de trabalho	170
Figura 7.27	Variação da fase com a frequência de trabalho	171
Figura 7.28	Flutuação de vazão para uma frequência de 2,0 Hz	172
Figura 7.29	Flutuação de vazão para uma frequência de 3,2 Hz	172
Figura 7.30	Flutuação de vazão para uma frequência de 4,4 Hz	172
Figura 7.31	Flutuação de vazão para uma frequência de 5,9 Hz	173
Figura 7.32	Flutuação de vazão para uma frequência de 6,9 Hz	173
Figura 7.33	Flutuação de vazão para uma frequência de 8,7 Hz	173
Figura 7.34	Flutuação de vazão para uma frequência de 9,9 Hz	174
Figura 7.35	Flutuação de vazão para uma vazão média de $4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ e frequência de 5,3 Hz	174
Figura 7.36	Flutuação de vazão para uma vazão média de $6,2 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ e frequência de 7,6 Hz	175
Figura 7.37	Gradientes de pressão para uma frequência de 2,0 Hz	176
Figura 7.38	Gradientes de pressão para uma frequência de 3,2 Hz	177

Figura 7.39	Gradientes de pressão para uma frequência de 4,4 Hz	177
Figura 7.40	Gradientes de pressão para uma frequência de 5,9 Hz	177
Figura 7.41	Gradientes de pressão para uma frequência de 6,9 Hz	178
Figura 7.42	Gradientes de pressão para uma frequência de 8,7 Hz	178
Figura 7.43	Gradientes de pressão para uma frequência de 9,9 Hz	178
Figura 7.44	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 2,0 Hz	180
Figura 7.45	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 3,3 Hz	180
Figura 7.46	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 4,4 Hz	181
Figura 7.47	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 5,9 Hz	181
Figura 7.48	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 6,9 Hz	181
Figura 7.49	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 8,7 Hz	182
Figura 7.50	Coeficientes dinâmicos de vazão para frequência de 9,9 Hz	182
Figura 7.51	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 2,0 Hz	183
Figura 7.52	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 3,2 Hz	184
Figura 7.53	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 4,4 Hz	184
Figura 7.54	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 5,9 Hz	184
Figura 7.55	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 6,9 Hz	185
Figura 7.56	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 8,7 Hz	185
Figura 7.57	Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 9,9 Hz	185

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1	Termos fontes e difusividades da equação geral em coordenadas cilíndricas	29
Tabela 3.1	Propriedades do fluido de trabalho	33
Tabela 3.2	Sinais gerados e grandezas medidas	35
Tabela 3.3	Dimensões das placas	50
Tabela 4.1	Resistência hidráulica de orifícios e fendas de mesma área transversal	81
Tabela 5.1	Expressões para os termos fonte e difusividades da equação geral transformada	111

RESUMO

Escoamentos a baixo número de Reynolds ($Re < 700$) através de placas de orifício concêntrico de diferentes geometrias são analisados tanto em regime permanente como em regime transiente. Para o estudo do escoamento transiente, a propagação de uma flutuação de vazão conhecida é relacionada a uma flutuação de pressão, permitindo a calibração dinâmica de um sistema de medição de vazão do tipo placa de orifício. A flutuação de vazão em torno de um escoamento médio, também conhecido, é produzida pelo movimento harmônico de um êmbolo. A variação de pressão através do orifício é determinada experimental e numericamente. A variação de pressão experimental é obtida através de transdutores de pressão diferencial acoplados a um sistema de aquisição dinâmica de dados. A variação de pressão numérica é obtida através da solução das equações de Navier Stokes, utilizando-se a técnica dos volumes finitos em coordenadas generalizadas e variáveis primitivas para a solução das equações diferenciais bidimensionais. Esta metodologia em coordenadas generalizadas permite que a solução seja obtida em um domínio computacional fixo, independente da forma geométrica do problema. Testes para várias frequências de flutuação e diferentes vazões médias são realizados.

O desconhecimento dos perfis de velocidade e a falta de simetria do escoamento nas proximidades do sistema gerador de flutuações de vazão impossibilita a solução numérica do escoamento como axi-simétrico nesta região. Para resolver este problema a placa de orifício é colocada num ponto a uma distância suficientemente afastada do sistema de geração de flutuações. É a partir deste ponto que o problema é tratado numericamente, considerando-se o escoamento axi-simétrico.

A simulação da propagação da onda de vazão, desde o gerador de flutuações até a placa de orifício é feita analiticamente, permitindo analisar o amortecimento e a fase do pulso de vazão enquanto o mesmo se desloca neste trecho. Para isto, um modelo analítico unidimensional é obtido a partir do balanço global das forças que atuam no sistema, utilizando-se a transformada de Laplace. Este modelo analítico, cujo comportamento é similar a um sistema massa-mola amortecido, permite determinar o módulo e a fase da velocidade instantânea do fluido na placa. Do ponto de vista de controle, este modelo analítico permite a obtenção de uma função transferência no tempo, capaz de descrever o comportamento de todos os parâmetros que influenciam a dissipação da flutuação de vazão. Desta forma, o modelo analítico permite, da mesma forma que na metodologia experimental, a obtenção das vazões dinâmicas na placa. Portanto, as condições de contorno na entrada do domínio numérico são as vazões obtidas experimentalmente para o regime permanente e as vazões obtidas do modelo analítico ou da metodologia experimental para o regime transiente.

Em resumo, o presente trabalho apresenta uma metodologia teórica e experimental para analisar o escoamento transiente em placas de orifício. A metodologia teórica, composta pelo modelo analítico acoplado à metodologia numérica, permite modelar completamente o escoamento dinâmico numa placa de orifício, independentemente de qualquer dado experimental. A metodologia experimental, neste caso, visa a obtenção de dados confiáveis para corroborar os dados teóricos.

ABSTRACT

Low Reynolds number flows ($Re < 700$) through concentric orifice plates of several geometries are analysed, for steady and transient conditions. For the transient condition the propagation of a fluctuation having a known flow amplitude is compared with the corresponding variation in pressure, enabling the dynamic calibration of an orifice plate flow measuring system. This flow disturbance is produced by the harmonic movement of a piston. The variation in pressure across the orifice plate is determined experimentally and numerically. The experimental determination is achieved by means of differential pressure transducers connected to a data acquisition system, capable of monitoring the dynamic response. The numeric determination is achieved by means of finite volume two dimensional Navier Stokes solution, in generalized coordinates, employing primitive variables. This technique is useful in obtaining a solution in a fixed computational domain not dependent on the geometry of the problem. Tests are carried out for different values of pressure and flow, numerically and experimentally.

The numerical solution of the axisymmetric flow in the neighborhood of the fluctuation generator is not possible since the exact velocity profiles are not known and the flow is not symmetric. These difficulties are avoided by placing the orifice plate at a position sufficiently apart from the generator. The numerical analysis is carried out from this point, where the flow can be assumed axisymmetric.

The simulation of a flow wave starting at the flow generator and going up to the orifice plate, enables the analysis of the damping and the phase of a pulse as it propagates along the duct. This analysis is carried out

employing a one-dimensional analytical model obtained from the global equilibrium of forces actuating on the system, using Laplace transform techniques. This model, similar in behaviour to a mass-spring damped system, enables the determination of the modulus and the instantaneous velocity of the fluid through the plate. From a control point of view this analytical model enables the determination of a transfer function in the time domain, which appropriately describes the behaviour of all the parameters which can influence the damping of a flow fluctuation. This way, the analytical model enables the determination of the dynamic response of the flow in the vicinity of the plate, as it is achieved experimentally. In other words, the boundary conditions at the inlet of the numerical domain are established by the steady flows obtained experimentally, for the steady state case, and by the analytical and experimental procedure for transient conditions.

Summarizing, the present work presents a theoretical and experimental technique useful in analysing the transient flows through orifice plates. The theoretical methodology, consisting of an analytical geometry coupled to a numerical approach, enables the complete dynamic modeling of an orifice plate, independently from any experimental results. The purposes of the experimental approach are to supply reliable results which can be used to validate the theoretical results and to finish the boundary conditions.

1 - INTRODUÇÃO

1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MEDIDORES DE VAZÃO DO TIPO PLACA DE ORIFÍCIO.

Nas últimas décadas uma grande quantidade de medidores de vazão foi desenvolvida. O uso de tecnologias avançadas tem permitido a construção de medidores cada vez mais sofisticados, tais como, por exemplo, os medidores ultrasônicos, controlados por microprocessadores que fornecem a medida acompanhada da incerteza de medição. Houve também grandes melhorias em outros tipos de medidores já existentes, como por exemplo nos medidores magnéticos. No entanto, cada tipo de medidor possui as suas próprias vantagens específicas e limitações, de maneira que nenhum deles tem, ao mesmo tempo, todas as características desejadas.

Dentre os medidores de vazão mais antigos e mais utilizados na atualidade encontram-se os medidores do tipo pressão diferencial, dentro dos quais, os mais difundidos são as placas de orifício. Estima-se que 70% dos medidores de vazão instalados no mundo sejam do tipo pressão diferencial, distribuídos entre placas de orifício, venturis e bocais de fluxo(Lomas [1]). Devido a sua simplicidade, baixo custo e segurança universal, as placas de orifício destacam-se em primeiro lugar. Estima-se que 40 a 42% dos medidores de vazão instalados na Europa e nos Estados Unidos sejam placas de orifício(Lomas [1]). As geometrias, localização das tomadas de pressão e outras exigências de instalação são bem especificadas em normas técnicas

internacionais para escoamento em regime permanente, com $Re > 4500$ e tubulações com diâmetros internos acima de 50mm (Delmée [2]). Devido a sua utilização muito difundida, esforços cada vez maiores tem sido realizados para conseguir menor incerteza nas medidas. No entanto, todas as melhorias conseguidas até agora para regime permanente foram baseadas na obtenção de novas fórmulas empíricas para o cálculo mais preciso dos coeficientes de vazão para a faixa de Re compreendido pelas normas (Pereira [3]).

Por outro lado, para escoamentos transientes ou para escoamentos em condições fora dos requisitos indicados pelas normas, nenhuma normalização existe na literatura. Embora esta situação permaneça, muitos trabalhos isolados descrevem o comportamento do escoamento para várias condições, existindo até certas discrepâncias em alguns trabalhos. Contudo, mesmo nas condições especificadas pelas normas, a medição correta, da vazão utilizando-se um medidor do tipo placa de orifício depende de vários fatores, e somente a redução dos erros apontados pelas novas determinações de coeficiente de vazão e a colocação de retificadores de fluxo não são suficientes para garantir uma medição correta, mesmo em regime permanente. Quando se trata de fluidos caros, como por exemplo, gás natural, 1% a mais de incerteza de medição pode representar perdas consideráveis. Na American Gas Association, por exemplo, 1% de 20 trilhões de pés cúbicos de gás natural não seriam quantificados por ano, representando uma perda de 7 milhões de dólares (Lomas [1]).

Tomando-se em conta as inúmeras vantagens dos medidores de vazão do tipo placa de orifício, tais como baixo custo, ampla aplicabilidade, facilidade de instalação, sem partes móveis, usados para fluidos corrosivos e várias medidas de linhas, entre outras, pode-se facilmente antever que eles continuarão sendo universalmente utilizados, embora novos medidores mais sofisticados possam surgir no mercado. Mas para isto, torna-se necessário aumentar ainda mais as vantagens de utilização e tentar reduzir os possíveis

erros de medição através de pesquisa avançada. Com esta finalidade, o presente trabalho, através de uma metodologia analítica, numérica e experimental, pretende obter maiores informações acerca do comportamento do escoamento laminar neste tipo de medidor e auxiliar, desta forma, no estabelecimento de correlações mais adequadas para os coeficientes de vazão, tanto para escoamentos em regime permanente como em regime transiente. Para este último regime são extremamente escassos os trabalhos disponíveis na literatura.

1.2 - CONSIDERAÇÕES INICIAIS SOBRE ESCOAMENTOS EM PLACAS DE ORIFÍCIO

O escoamento de fluidos através de restrições ou orifícios, em medidores de vazão do tipo pressão diferencial (sistemas deprimogênios), constitui uma classe particular de problemas em dinâmica de fluidos. A função da placa de orifício, como qualquer outro sistema deprimogênio (venturi, bocal de fluxo, etc), é criar um diferencial de pressão, ΔP , que seja relacionado à vazão, Q , através de uma equação do tipo $Q = c \sqrt{\Delta P}$, onde c depende dos parâmetros próprios da placa de orifício, da configuração física e das características do fluido. Em escoamentos turbulentos este parâmetro depende também das características do escoamento.

Em geral, o cálculo de uma placa de orifício para regime permanente consiste em encontrar o diâmetro de orifício partindo-se da vazão requerida, das propriedades do fluido, das características geométricas da tubulação e da pressão diferencial (Delmée [2]). Desta forma, a vazão em regime permanente através de um orifício é dada por Merrit [4], como sendo

$$Q = C_d A_o \sqrt{\frac{2 (P_u - P_{vc})}{\rho}} \quad (1.1)$$

onde

Q = vazão volumétrica (m^3/s);

C_d = coeficiente de descarga;

A_o = área do orifício (m^2);

ρ = densidade do fluido (kg/m^3);

P_u = pressão a montante (Pa);

P_{vc} = pressão na vena contracta (Pa).

É muito frequente, no entanto, apresentarem-se os resultados usando-se um coeficiente de vazão, C_q , com uma pressão diferencial dada por $\Delta P = P_u - P_d$, onde P_d é a pressão estática a jusante do orifício. Neste caso, tem-se para o regime permanente,

$$Q = C_q A_o \sqrt{\frac{2 (P_u - P_d)}{\rho}} \quad (1.2)$$

De acordo com a expressão anterior, a cada vazão corresponde um coeficiente de vazão. Desta forma, do ponto de vista teórico, o cálculo deste coeficiente somente é exato para o valor da vazão que foi utilizado para efetuar-lo no momento da calibração. No entanto, do ponto de vista prático, o coeficiente abrange uma gama de vazões que a placa deve medir dentro da faixa calibrada, ainda que pequenos erros ocorram. Por esta razão, um dos principais inconvenientes dos medidores de vazão do tipo placa de orifício é o seu uso limitado a faixas pequenas de vazão, sendo necessário uma recalibração quando os valores a serem medidos se afastam dos limites para os quais a placa foi calibrada.

Do ponto de vista prático, um dos problemas principais que contribui para aumentar a incerteza da medição é o que diz respeito à incerteza da medição do transdutor de pressão utilizado na calibração. Na grande maioria, esta incerteza é dada em função do valor final da escala do instrumento, sendo geralmente da ordem de 0,25 a 1% do valor final de escala (Bonnington [5]). Desta forma, como a pressão diferencial é proporcional ao quadrado da vazão, quando esta atingir 1/4 a 1/3 da vazão máxima, a pressão diferencial

correspondente será $1/16$ a $1/9$ do ΔP máximo. Assim, a incerteza relativa sobre o valor instantâneo da vazão passa a ser, neste caso, afetado pelos fatores 16 e 9, dando origem a erros de medição relativamente grandes com respeito ao valor instantâneo medido. Por isso, quando se deseja medir vazões em uma faixa mais ampla, deve-se dividir este intervalo em faixas menores e fazer a calibração para cada faixa menor, utilizando-se transdutores na faixa de operação adequada. Isto, no entanto, acarreta um trabalho experimental relativamente grande e demorado, além da necessidade de equipamento de alta precisão e conseqüentemente maiores investimentos.

Por outro lado, para o caso de escoamento laminar em dutos circulares ($Re < 2300$), o problema da instabilidade do coeficiente de vazão torna-se um problema difícil de resolver, na medida em que a variação do número de Reynolds pode implicar na variação do regime de escoamento. Isto é, para um número de Reynolds menor que 2300, o escoamento é laminar no duto, mas pode ser turbulento na placa, dependendo do diâmetro e geometria do orifício (Johansen [6] e Bogema e Monkmeyer [7]). Isto cria também um problema sério na solução numérica do escoamento, dificultando a convergência do processo iterativo à medida em que o número de Reynolds cresce ainda na faixa laminar. Quando o número de Reynolds é baixo, a queda de pressão através do orifício é função, principalmente, das forças cisalhantes internas, resultantes da viscosidade do fluido. Se o número de Reynolds for aumentado, ocorre a separação na região a jusante da placa, e as forças de inércia dominam. De fato, Johansen [6], usando técnicas de visualização observou que o escoamento é completamente laminar para $Re < 150$. Para $Re \approx 600$, recirculações suaves são claramente visíveis e, para Re acima de 1200, uma região de turbulência forte é formada a jusante do orifício. Isto inviabiliza a obtenção de uma expressão empírica única para a obtenção dos coeficientes de vazão na faixa laminar de escoamento. Nesta faixa, o número de Reynolds pode alterar fortemente e de maneira diferente os valores dos coeficientes de vazão.

Para escoamentos transientes em placas de orifício a expressão para o cálculo da vazão pode ser escrita, da mesma forma que para o regime permanente, como

$$Q(t) = C_q(t) A_o \sqrt{2\Delta P(t)/\rho} \quad (1.3)$$

onde

$$\Delta P(t) = P_u(t) - P_d(t) \quad (1.4)$$

Desta formã, a obtenção experimental de $Q(t)$ e $\Delta P(t)$ possibilita a obtenção do coeficiente dinâmico de vazão, $C_q(t)$. Neste caso, além de prever a influência dos parâmetros geométricos e a variação do regime de escoamento, devem-se tomar em conta também seus parâmetros transientes. Embora os coeficientes de vazão para escoamentos em regime permanente tenham sido medidos com precisão para números de Reynolds acima de 4500, as informações a respeito destes coeficientes para baixos números de Reynolds ($Re < 2300$), são limitadas. Menos informações tem-se ainda a respeito de coeficientes de vazão transientes para escoamentos a baixas velocidades (Alpay [8] e Bowns et al [9]).

1.3 - PARÂMETROS QUE AFETAM A ESTRUTURA HIDRODINÂMICA DO ESCOAMENTO EM PLACAS DE ORIFÍCIO.

Do ponto de vista prático, as discrepâncias existentes entre as condições de calibração e as condições reais de utilização, são as maiores responsáveis pelos erros existentes nos medidores de vazão do tipo pressão diferencial. Isto geralmente acontece porque não é dada muita atenção à estrutura hidrodinâmica do escoamento, mesmo porque na instalação torna-se

muito difícil o controle local de tais parâmetros. No entanto, é esta estrutura hidrodinâmica que determina as características metrológicas do medidor. Pesquisadores têm mostrado que os fatores que afetam esta estrutura hidrodinâmica podem ser divididos em dois grupos (Garshin [10]). O primeiro grupo é constituído pelos parâmetros geométricos da placa. O segundo grupo é constituído pelos fatores que afetam o perfil de velocidade do escoamento incidente e envolve: o tipo de escoamento (laminar, transição ou turbulento), rugosidade da superfície do duto e da placa, comprimento de duto reto a montante da placa e parâmetros transientes do escoamento.

Um modelo numérico, plenamente validado através de dados experimentais, como o proposto no presente trabalho, será capaz de analisar esta estrutura hidrodinâmica do escoamento, permitindo modificar parâmetros em diferentes combinações e analisar as diferentes interações.

1.4 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dentro da literatura consultada, referente a escoamentos em regime permanente através de placas de orifício, muitos são os trabalhos que descrevem diferentes geometrias e condições de escoamento, baseados em pesquisa experimental e metodologias numéricas. A maioria destes trabalhos envolvem escoamentos turbulentos, dentro da mesma faixa de número de Reynolds e diâmetros de linhas estabelecidas pelas normas, com o objetivo de poder corroborar seus resultados numéricos ou experimentais.

Para escoamentos a baixo número de Reynolds, mesmo em regime permanente, não existe nenhuma normalização, e a maioria dos trabalhos encontrados na literatura apresentam resultados numéricos para condições bem

específicas de escoamento. Para a solução numérica das equações diferenciais, várias são as metodologias utilizadas neste caso, mas apenas um dos trabalhos encontrados propõe a solução em coordenadas generalizadas. Dentro de uma grande quantidade de trabalhos encontrados na literatura sobre escoamentos em regime permanente através de orifícios ou fendas, os seguintes são mencionados por terem contribuído direta ou indiretamente na concepção do presente trabalho.

Para baixos números de Reynolds, as investigações experimentais realizadas por Johansen [6], em 1930, e Tuve and Sprenkle [11], em 1933, merecem ser mencionadas. Johansen, estudando o escoamento através de orifícios em tubos e usando técnicas de visualização, observou que o escoamento é completamente laminar para $Re < 150$. Recirculações eram claramente visíveis quando o número de Reynolds se aproximava de 600. Para números de Reynolds acima de 1200 uma região de turbulência forte era formada a jusante do orifício.

Mills [12] e Greenspan [13], resolveram numericamente o escoamento através de placas de orifício de borda quadrada (canto vivo) para baixos números de Reynolds. Eles usaram aproximações por diferenças finitas em coordenadas cartesianas para resolver as equações diferenciais. Embora obtivessem resultados numéricos coerentes para os coeficientes de descarga, estes valores não coincidiram com os resultados experimentais. Num trabalho mais recente, Nigro [14], utilizando o método dos volumes finitos em coordenadas curvilíneas ortogonais e as equações para a função corrente e vorticidade, obteve a solução numérica do escoamento laminar incompressível para valores de número de Reynolds próximos de 2000, com relação ao diâmetro do orifício. Para números de Reynolds acima deste valor, os valores da função corrente e vorticidade oscilaram sem convergir. Esta flutuação obtida por Nigro, embora o autor não esclareça, pode ser devida ao problema das condições de contorno para vorticidade e função corrente não serem adequadas para altos

números de Reynolds, ou devido ao escoamento ter-se tornado fortemente turbulento na placa e as equações não representarem mais o fenômeno.

Strong et al. [15], apresentam a solução numérica para 3 geometrias de placas de orifício, com várias relações de diâmetro e números de Reynolds diferentes. Os valores numéricos dos coeficientes de descarga são comparados com resultados experimentais encontrados na literatura, considerando-se o escoamento laminar e incompressível.

A influência da geometria da borda de um orifício circular no coeficiente de descarga foi objeto de estudo por Crocket and Upp [16] e, anteriormente, por Bogema et all [17].

Sheikholeslami e Patel [18], estudaram o escoamento turbulento em regime permanente através de uma placa de orifício, usando o modelo $k-\epsilon$. Os valores numéricos dos coeficientes de descarga foram comparados com os valores empíricos fornecidos pela norma API/AGA. Para a obtenção dos resultados numéricos foi utilizado o pacote computacional "FLUENT" [19], em coordenadas ortogonais. Várias conclusões importantes foram tiradas deste trabalho

- a) os resultados numéricos diferiram no máximo 2% dos resultados empíricos fornecidos pelas normas;
- b) os efeitos das condições de contorno a jusante são praticamente insignificantes;
- c) os efeitos das condições de contorno a montante influenciam significativamente o coeficiente de descarga. Por exemplo, um elemento redutor a 6,2 D a montante da placa produziu uma redução de 3,7% nos coeficientes de descarga;
- d) os efeitos da rugosidade do duto causaram uma queda máxima de 0,7% no valor do coeficiente de descarga.

O problema transiente em processos hidrodinâmicos tem sido tratado, por vários autores, fornecendo informações cada vez mais precisas a medida que

as técnicas computacionais têm-se desenvolvido. Desta forma, escoamentos mais complexos passaram a ser tratados não somente de forma experimental, mas também numericamente. No entanto, embora o escoamento transiente através de placas de orifício tenha sido tratado sobre vários aspectos, a maioria destes trabalhos são casos em condições bem específicas que dificultam a reprodução experimental ou numérica por falta de informações técnicas e detalhes construtivos. Dentre alguns dos trabalhos encontrados na literatura que tratam a respeito de escoamentos transientes em dispositivos de medidores de vazão do tipo pressão diferencial, podem ser citados, entre outros, os seguintes:

Trengrouse [20], apresentou um método experimental para produzir condições de fluxo transientes e mostrou que os coeficientes de descarga diferem, daqueles para regime permanente, de um valor máximo de 7%, mas sem definir claramente as frequências utilizadas e as condições de trabalho.

Yokota e Nakano [21], desenvolveram um novo tipo de sensor de vazão usando um estrangulamento cilíndrico para medir vazões transientes. Semelhante a uma placa de orifícios, a relação dinâmica entre a queda de pressão através do estrangulamento e a vazão através do mesmo é utilizada para estimar a vazão transiente. A relação dinâmica entre queda de pressão e vazão é descrita por um sistema não linear de 1ª ordem. As pressões são determinadas experimentalmente e o medidor é calibrado utilizando-se um outro medidor de vazão padrão.

Pedroso [22] e [23], propõe um modelo unidimensional incompressível utilizando dados experimentais para abordar os efeitos dissipativos devidos a transientes. Ele trata especialmente dos problemas de natureza fluido-estrutura. Um escoamento transitório (oscilatório), provocado pelo movimento sinusoidal de um pistão é utilizado para obtenção dos dados experimentais.

Tsung [24], com o objetivo de determinar a resistência hidráulica através de orifícios, mediu experimentalmente a diferença de pressão dinâmica

que ocorria quando uma variação de volume, provocada pelo deslocamento de um pistão, era produzida no interior de uma tubulação.

Embora estes dois últimos trabalhos não tenham como objetivo o estudo de vazões transientes em sistemas de medição de vazão, eles foram de grande utilidade no desenvolvimento da bancada experimental e do modelo dinâmico desenvolvido no presente trabalho.

Cabe salientar que vários são os aspectos que caracterizam o presente trabalho e o diferenciam dos demais encontrados na literatura, referentes ao mesmo assunto. Em primeiro lugar, a solução numérica das equações é realizada em coordenadas generalizadas e o modelo numérico desenvolvido permite analisar escoamentos compressíveis e incompressíveis, permitindo determinar com mais realidade o comportamento do escoamento. Em segundo lugar, a determinação do comportamento dinâmico de placas de orifício através de uma metodologia teórica e experimental, proporcionará novas informações a respeito da possibilidade de se usar este tipo de medidor para determinação de vazões dinâmicas nas diferentes áreas da engenharia.

Dos muitos trabalhos encontrados na literatura referentes ao estudo de escoamentos em placas de orifício, ainda outros como [25], [26], [27], [28], [29], [30], [58] são recomendados para leitura.

1.5 - MOTIVAÇÃO E CONTRIBUIÇÕES

Como escoamentos pulsantes são encontrados em muitas aplicações da engenharia, principalmente em sistemas hidráulicos e pneumáticos, existe a necessidade de medição de vazões instantâneas para determinação de características dinâmicas de servo-mecanismos. Sendo os medidores de vazão do tipo pressão diferencial os mais simples e de menor custo encontrados no mercado, optou-se pela análise de um medidor do tipo placa de orifício,

constituindo-se este fato a motivação inicial deste trabalho.

Tomando-se em conta que muito pouco se conhece a respeito da utilização de tais medidores para vazões transientes, o presente trabalho pretende sugerir uma metodologia teórica e experimental para estudar um escoamento em regime permanente e transiente através de um sistema de medição de vazão do tipo placa de orifício.

A metodologia teórica para o regime permanente envolve apenas um procedimento numérico com condições de contorno de vazão na entrada do domínio numérico.

A metodologia teórica para o regime transiente envolve um modelo analítico e um modelo numérico para o estudo de um escoamento pulsante através de uma restrição. O modelo analítico analisa a propagação do pulso de vazão entre o gerador de flutuações e a placa de orifício, determinando a condição de contorno transiente para o modelo numérico. O modelo numérico, utilizando as vazões transientes, obtidas pelo modelo analítico ou pela metodologia experimental, como condições de contorno de entrada, determina os gradientes de pressão e os coeficientes dinâmicos de vazão na placa. Na metodologia numérica, a solução das equações de Navier Stokes permite, ao mesmo tempo, a visualização dos campos de velocidade e pressão, fornecendo uma idéia da estrutura hidrodinâmica instantânea e local do escoamento. A comparação com os dados experimentais dos parâmetros globais tais como gradientes de pressão e coeficientes dinâmicos de vazão, obtidos teoricamente para várias vazões e condições do escoamento, permite a validação do modelo teórico proposto.

Na tentativa de se aproximar mais das condições reais do escoamento, o modelo numérico envolve também os efeitos de compressibilidade do sistema e a perfeita reprodução da geometria do orifício. A utilização de malhas generalizadas, reproduz a geometria do orifício sem a necessidade de interpolações e independentemente da geometria assumida. Desta forma, o

programa computacional desenvolvido permite analisar o escoamento de qualquer sistema de medição de vazão do tipo pressão diferencial (qualquer tipo de restrição), utilizando-se qualquer tipo de fluido (gás ou líquido), bastando para isto apenas conhecer as propriedades do fluido a ser utilizado e a geometria da restrição.

Em sistemas hidráulicos, a presença de ar no óleo torna o escoamento compressível. Tal efeito não é, em geral, tomado em consideração quando se analisa este tipo de escoamento. Como a quantificação do ar no óleo é difícil de se obter, a solução mais viável encontrada no presente trabalho foi a de determinar experimentalmente o coeficiente de compressibilidade efetivo do sistema, no qual os efeitos do ar presente no óleo e a deformação das tubulações são incluídos. Este procedimento é descrito na metodologia experimental.

A associação entre a metodologia analítica e numérica dá um tratamento teórico global ao problema transiente. Esta metodologia pode ser aplicada no estudo do comportamento dinâmico de qualquer tipo de medidor de vazão de pressão diferencial (bocal de fluxo, placa de orifício ou venturi), além de permitir a análise dinâmica de válvulas hidráulicas, servomecanismos e escoamentos em orifícios de qualquer sistema hidráulico ou pneumático.

Finalmente, todos os dados teóricos (analíticos e numéricos) são comparados com os dados experimentais. Tal procedimento confere confiabilidade à metodologia teórica, permitindo que a mesma seja aplicada a outros casos ou sistemas.

2 - CARACTERIZAÇÃO DO PROBLEMA

2.1 - INTRODUÇÃO

O objetivo do presente trabalho é analisar o comportamento estático e dinâmico do escoamento através de placas de orifício concêntrico. Para isto, um escoamento a baixo número de Reynolds é gerado e analisado utilizando-se uma metodologia teórica e experimental.

A Fig. 2.1 mostra o esquema geral do sistema estático e dinâmico utilizado. Teoricamente, a vazão total que passa pela placa de orifício do sistema de medição de vazão dinâmica é a soma da flutuação criada no gerador de pulsos de vazão, $Q_p(t)$, mais a vazão média, Q_0 , medida na placa do sistema de medição de vazão estática, ou seja

$$Q_t(t) = Q_p(t) + Q_0 \quad (2.1)$$

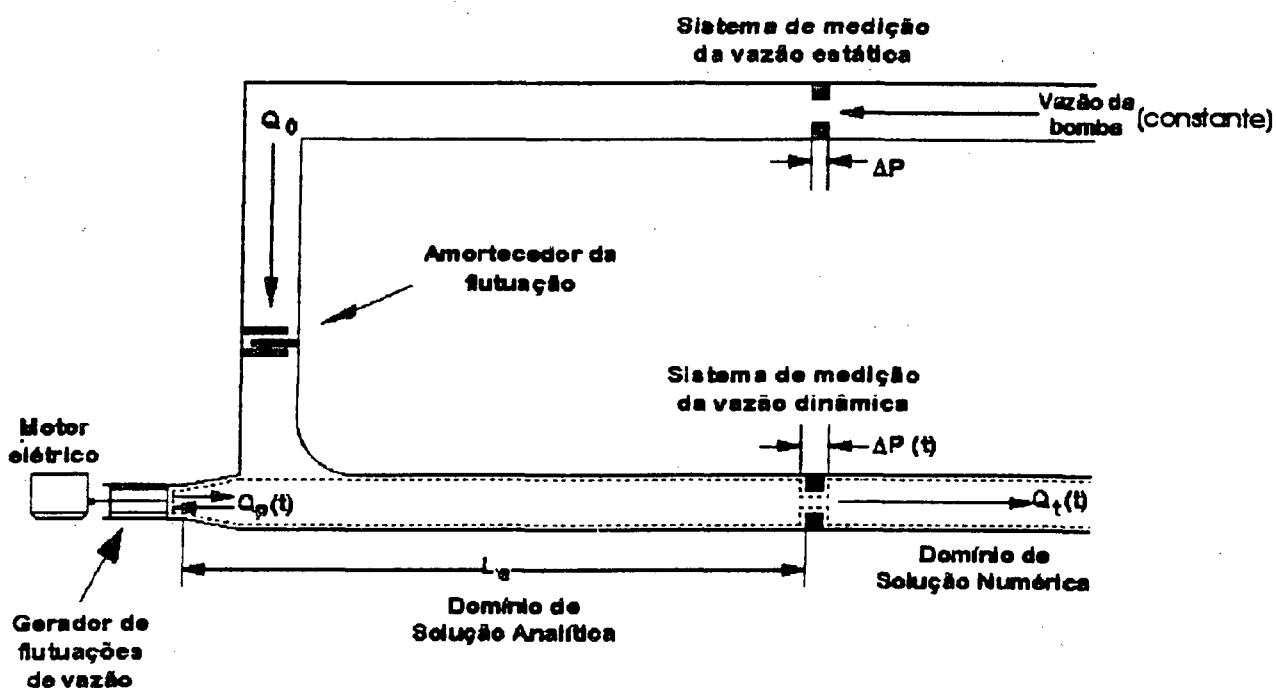


Fig. 2.1 - Esquema geral do sistema dinâmico utilizado.

No entanto, devido a problemas construtivos e por razões que ficarão óbvias nos capítulos posteriores, o sistema de medição de vazão dinâmica é instalado a uma distância L_e do gerador de pulsos de vazão. Devido à compressibilidade do sistema, ao atrito viscoso, à mudança de direção do escoamento médio Q_0 , à frequência imposta ao sistema e à geometria do orifício, entre outros, surgem efeitos dissipativos na flutuação de vazão à medida em que ela percorre a distância L_e . Assim sendo, a vazão real que deverá ser medida ou calculada a uma distância L_e do gerador de pulsos de vazão deve considerar estes efeitos dissipativos da flutuação. Desta forma, a vazão total real na placa de orifício, e que deverá ser medida pelo sistema de medição de vazão dinâmica, é dada por

$$Q_t(t) = Q_a(t) + Q_0 \quad (2.2)$$

onde $Q_a(t)$ é a flutuação de vazão amortecida e defasada, a ser determinada pelas metodologias experimental e teórica propostas.

A metodologia experimental consiste em medir diretamente a vazão total $Q_t(t)$ através de um sistema de medição de vazão do tipo placa de orifício. Neste caso, os efeitos dissipativos da flutuação estão implícitos nos valores de $Q_t(t)$ obtidos experimentalmente. A obtenção experimental dos valores de $Q_t(t)$ envolve a determinação de $\Delta P(t)$ através de uma expressão do tipo

$$Q_t(t) = A_0 k [\Delta P(t)]^b \quad (2.3)$$

Aqui, k e b são parâmetros determinados em função de medidas obtidas experimentalmente.

A metodologia teórica é composta por um modelo analítico e um modelo numérico. A metodologia analítica utilizada consiste em determinar os efeitos dissipativos da flutuação de vazão, desde o gerador de pulsos de vazão até a placa de orifício, através do desenvolvimento de um modelo analítico

unidimensional utilizando-se transformada de Laplace. Desta forma, a vazão dinâmica na placa de orifício é obtida por

$$Q_t(t) = Ra_a Q(t-\tau_a) + Q_0 \quad (2.4)$$

Aqui Ra_a e τ_a representam os parâmetros dissipativos (razão de amplitude e fase), determinados pelo modelo analítico. A validação da metodologia analítica é obtida comparando-se as vazões $Q_t(t)$ através das Eqs. (2.3) e (2.4).

A metodologia numérica consiste na obtenção dos gradientes de pressão e dos coeficientes dinâmicos de vazão da placa de orifício, através da solução das equações de Navier Stokes, utilizando-se como condição de contorno de entrada as vazões dadas pelas Eqs. (2.3) ou (2.4). Quando a Eq. (2.3) é utilizada como condição de contorno do problema numérico, a comparação dos gradientes de pressão e dos coeficientes dinâmicos de vazão obtidos numericamente e experimentalmente, valida totalmente a metodologia numérica. Por outro lado, quando a Eq. (2.4) é utilizada como condição de contorno do domínio numérico, o tratamento do problema envolve uma solução totalmente teórica, composta de uma parte analítica, para obtenção da condição de contorno, e uma parte numérica, para obtenção dos gradientes de pressão e coeficientes de vazão dinâmicos. Note que, uma vez validada a metodologia numérica, utilizando-se a Eq. (2.3) como condição de contorno, a validação da metodologia analítica consiste simplesmente na comparação das Eqs. (2.3) e (2.4), completando, assim, a validação da metodologia teórica.

A Fig. 2.2 mostra o esquema geral das metodologias utilizadas e as interações entre as mesmas. O pulso de vazão, $Q_p(t)$, produzido pelo gerador de flutuações de vazão em torno de um escoamento médio, Q_0 , é tratado utilizando-se uma metodologia experimental e uma metodologia teórica. Aqui, tanto $Q_p(t)$ como Q_0 são valores impostos ao sistema. Os índices "a", "e" e "n" indicam os valores analíticos, experimentais e numéricos, respectivamente.

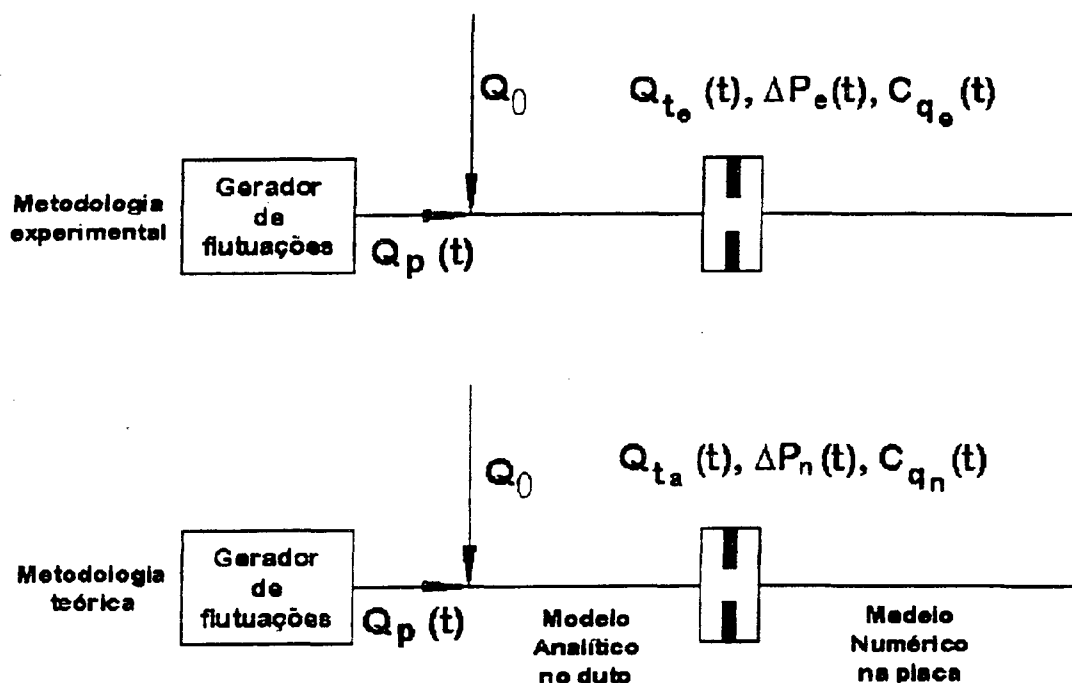


Fig. 2.2 Procedimento de comparação das metodologias utilizadas

Na metodologia experimental, as vazões e os coeficientes transientes de vazão são obtidos como uma função dos gradientes de pressão na placa.

Na metodologia teórica, o modelo analítico determina as vazões transientes como uma função da razão de amplitude, R_a , e da defasagem da flutuação de vazão, θ , fornecendo as condições de contorno para o modelo numérico. Estas condições de contorno transientes não são conhecidas para problemas gerais. Daí, num problema transiente, não adianta ter um bom modelo numérico sem condições de contorno confiáveis no tempo. Desta forma, a comparação do modelo analítico com os resultados experimentais permite que as duas partes sejam autosuficientes e constituam um modelo teórico global. A seguir são descritos, brevemente, os procedimentos teóricos e experimentais.

2.2 - A METODOLOGIA EXPERIMENTAL

A metodologia experimental desenvolvida tem a finalidade de corroborar os resultados obtidos a partir das metodologias analítica e numérica e também conhecer as características do escoamento em estudo. A Fig. 2.1 mostra o esquema geral do sistema dinâmico utilizado. Aqui, a flutuação de vazão é produzida pelo movimento harmônico de um pistão, acionado por um motor elétrico com frequência angular controlada. O movimento harmônico do pistão é obtido através de um mecanismo tipo garfo escocês (Scotch Yoke), o qual gera ondas senoidais de vazão em torno do escoamento médio Q_0 . A vazão média, Q_0 , é gerada por uma bomba tipo palhetas e medida através do sistema de medição de vazão constante. As flutuações de vazão são obtidas relacionando-se a vazão total, $Q_t(t)$, com o gradiente de pressão dinâmica, $AP(t)$, medido por transdutores de pressão no sistema de medição de vazão dinâmica. Devido ao efeito elíptico da flutuação de pressão, um amortecedor tipo labirinto impede que a flutuação de pressão se propague na direção vertical. As Figs. 2.3 e 2.4 mostram, como ilustração, as flutuações de pressão captadas pelos transdutores do sistema de medição de vazão dinâmica e a correspondente flutuação de vazão para uma frequência de 2Hz, respectivamente.

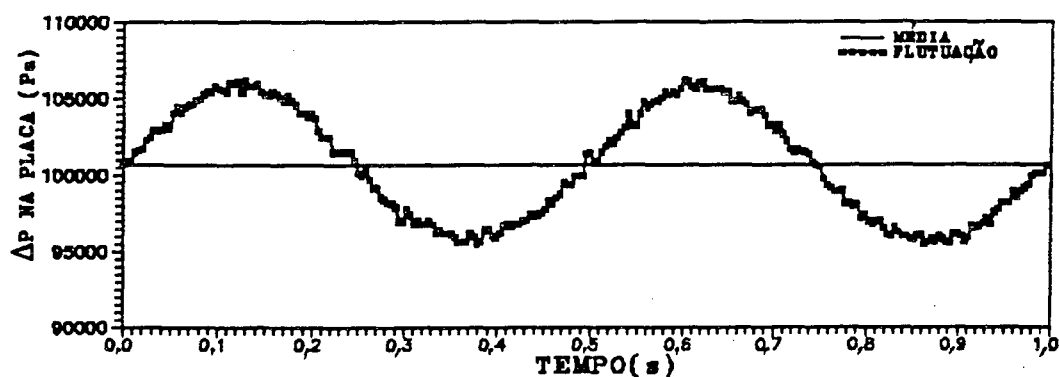


Fig. 2.3 - Flutuação de AP na placa obtida experimentalmente para uma frequência de 2,0 Hz.

Para a obtenção dos dados experimentais utilizou-se uma série de sistemas de medição e uma ampla cadeia de processamento de sinais. Tanto a compressibilidade do sistema, como a viscosidade e densidade do fluido foram determinadas experimentalmente, tal como será descrito posteriormente.

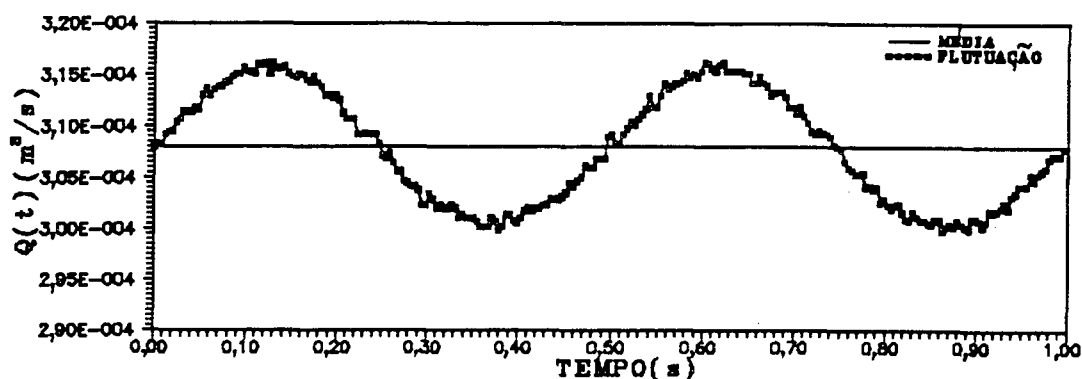


Fig. 2.4 - Flutuação de vazão obtida experimentalmente para uma frequência de 2.0 Hz.

A vazão total medida no sistema de medição de vazão dinâmica é dada por

$$Q_t(t) = A_0 k [\Delta P(t)]^b \quad (2.5)$$

onde

A_0 = área da seção do orifício (m^2)

k = constante obtida da calibração da placa

b = constante obtida da calibração da placa

$\Delta P(t)$ = gradiente de pressão dinâmica medido no orifício (Pa)

Devido à compressibilidade do sistema e à distância existente entre o gerador de flutuações e a placa de orifício (ver Fig 2.1), a vazão de fluido deslocada pelo pistão, $Q_p(t)$, sofre um amortecimento e atraso no tempo, até atingir o sistema de medição dinâmico de vazão. Este amortecimento é caracterizado por uma queda na amplitude e um atraso no tempo da onda de vazão gerada. Isto significa que a onda de vazão que chega na placa de orifício terá

um módulo menor que $Q_p(t)$ e atingirá a placa instantes depois que $Q_p(t)$ for gerado no gerador de flutuações. Do ponto de vista de controle, a vazão $Q_p(t)$ representa o sinal de excitação do sistema, sendo dado pela equação teórica do pulso de vazão

$$Q_p(t) = A_c r w \sin wt \quad (2.6)$$

onde

A_c = área da seção do cilindro do gerador de flutuações (m^2)

r = raio de excêntrico da manivela (m)

w = frequência angular (rad/s)

wt = ângulo da manivela (rad)

Por outro lado, a vazão instantânea que realmente passa pela placa de orifício e que corresponde a um $Q_p(t)$ amortecido pode ser dada por

$$Q_a(t) = Ra Q_p(t-\tau) \quad (2.7)$$

Do ponto de vista de controle, a vazão $Q_a(t)$ representa o sinal de saída do sistema, Ra representa a razão de amplitude entre o sinal de saída e sinal de excitação e τ representa atraso entre os dois sinais. Considerando-se que $Q_e(t)$ é a vazão da flutuação, medida experimentalmente, a razão de amplitude entre o sinal de saída e o sinal de excitação, em cada instante de tempo, é dada por

$$Ra(t) = \frac{Q_e(t)}{Q_p(t) - Q_z(t)} \quad (2.8)$$

onde $Q_z(t)$ é o vazamento através da folga pistão-cilindro, calculado teoricamente (m^3/s).

A defasagem entre a flutuação de vazão medida na placa e a produzida pelo pistão é obtida experimentalmente por

$$\theta = - 2 \pi f \Delta t \quad (2.9)$$

onde

f = frequência cíclica medida pela rotação do motor de acionamento (1/s)

Δt = intervalo de tempo correspondente à defasagem entre as vazões (s)

O intervalo de tempo correspondente à defasagem é determinado comparando-se o instante de tempo no qual o pistão atinge a sua velocidade máxima com o instante de tempo no qual ocorre o valor máximo de $\Delta P(t)$, captado pelos transdutores de pressão. O instante de tempo no qual o pistão atinge a sua velocidade máxima foi determinado com a utilização de um fototransistor fixado no eixo do gerador de flutuações de vazão.

2.3 - A METODOLOGIA ANALÍTICA

A Fig. 2.5 mostra o volume de controle do oscilador proposto e a trajetória a ser percorrida pela onda de vazão gerada pelo movimento alternativo do pistão. Conhecido o deslocamento instantâneo do pistão, $x(t)$, e considerando-se $y(t)$ o deslocamento instantâneo do fluido nas proximidades da placa de orifício concêntrico, colocada a uma distância L_e do gerador de pulsos de vazão, o objetivo da metodologia analítica é obter uma relação da forma $\dot{y}(t) = Ra \dot{x}(t-\tau)$, onde Ra representa a razão entre as amplitudes das velocidades e τ o atraso da flutuação.

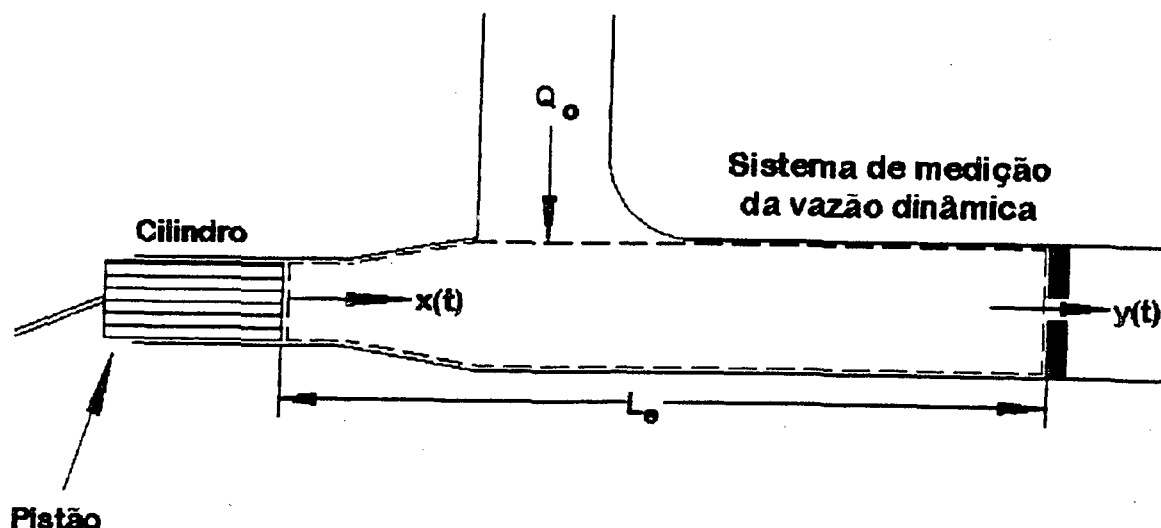


Fig. 2.5 - Domínio da solução analítica.

Neste sistema, as ondas se processam de forma alternada e repetitiva, tendo um caráter oscilatório. Estas características levam o sistema a se comportar de forma similar a um sistema mecânico amortecido.

De maneira similar a um sistema mecânico, o movimento de um fluido pode ser modelado em termos de parâmetros dissipativos (Wellstead [66]). Desta forma, uma ampla variedade de sistemas de engenharia, que usam fluido como meio de trabalho, podem ser modelados como sistemas mecânicos. A modelagem destes sistemas de fluidos a partir da analogia com sistemas mecânicos, permite um tratamento global, através de propriedades médias, levando a soluções de escoamentos unidimensionais em pontos específicos do sistema. A metodologia de obtenção deste modelo, a solução analítica da equação obtida e o estudo do seu comportamento global, são apresentados no Cap. 4.

2.4 - A METODOLOGIA NUMÉRICA

As Figs. 2.6 e 2.7 representam esquematicamente a geometria geral do problema físico a ser resolvido numericamente, envolvendo uma placa de orifício concêntrico num duto de seção circular, com os principais parâmetros geométricos que influenciam o escoamento.

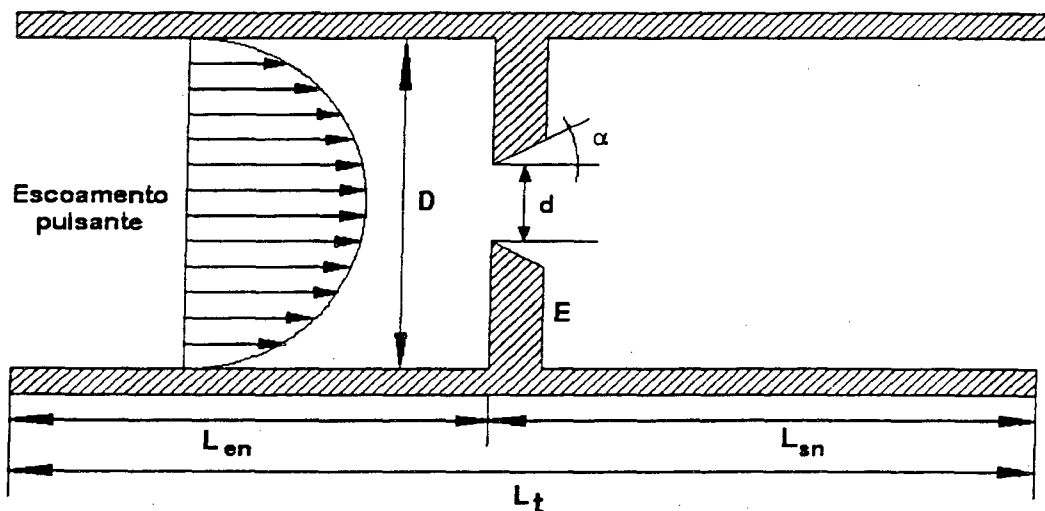


Fig. 2.6 - Parâmetros geométricos típicos de uma placa de orifício concêntrico.

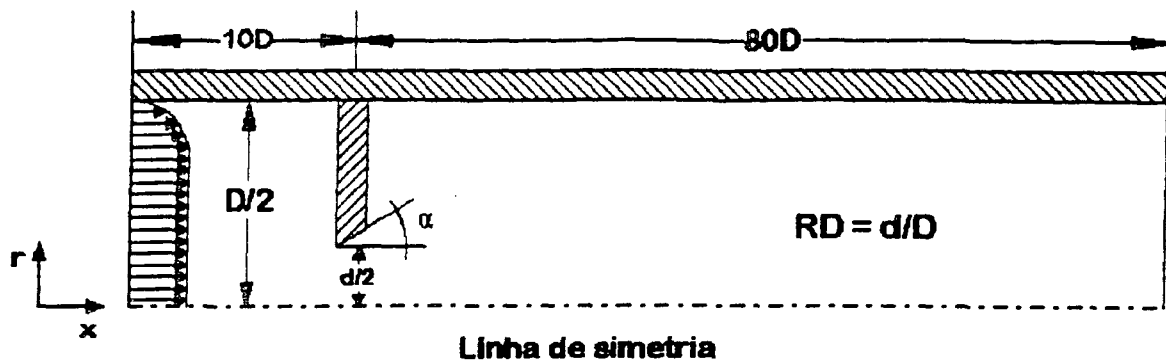


Fig. 2.7 - Domínio de solução utilizado na metodologia numérica.

Para o regime permanente, os parâmetros de entrada do programa computacional são as vazões estáticas obtidas da calibração das placas. A velocidade média, o número de Reynolds e o coeficiente de vazão são calculados, respectivamente, por

$$\bar{U} = \frac{Q_0}{A_D} \quad (2.10)$$

$$Re = \frac{4Q_0}{\pi d \nu} \quad (2.11)$$

$$C_q = \frac{Q_0}{A_0 \sqrt{\frac{2(P_u - P_d)}{\rho}}} \quad (2.12)$$

$$Re_o = \frac{Re}{RD} \quad (2.13)$$

$$RD = \frac{d}{D} \quad (2.14)$$

onde

Re = número de Reynolds baseado no diâmetro do duto;

\bar{U} = velocidade média do escoamento (m/s);

Re_o = número de Reynolds baseado no diâmetro do orifício;

Q_0 = vazão volumétrica (m³/s);

C_q = coeficiente de vazão estático;

D = diâmetro hidráulico do duto (m);

d = diâmetro do orifício (m);

A_D = área do duto (m^2);

ν = viscosidade cinemática do fluido;

RD = relação de diâmetro do orifício;

P_u = pressão a montante da placa (Pa);

P_d = pressão a jusante da placa (Pa);

Para o regime transiente, tal como descrito no item 2.1, as condições de contorno na entrada do programa computacional são as vazões dinâmicas obtidas experimentalmente ou analiticamente. A velocidade média, o número de Reynolds, o coeficiente de vazão e demais parâmetros são calculados da mesma forma que no regime permanente, com a diferença que agora passam a ser funções do tempo.

As hipóteses admitidas na solução do escoamento são as seguintes:

- a) escoamento laminar, isotérmico, plenamente desenvolvido;
- b) fluido Newtoniano ;
- c) μ constante;
- d) desprezam-se forças de corpo;
- e) desprezam-se os efeitos da cavitação (Nigro [14]);
- f) desprezam-se os efeitos da rugosidade das paredes do duto e da placa (Sheikholeslami [18]).

Embora em algumas aplicações seja possível considerar o óleo praticamente incompressível, do ponto de vista prático isto não acontece, principalmente para sistemas dinâmicos. Em hidráulica, por exemplo, a compressibilidade dos fluidos é um fator predominante na determinação da frequência de ressonância de sistemas. Na maioria dos casos isto implica em limitações de velocidade de resposta de um componente a um dado sinal de entrada, ou seja, uma limitação no comportamento dinâmico (Linsingen [31]). Por este motivo, embora as velocidades sejam relativamente baixas, um estudo

numérico dos efeitos da compressibilidade do óleo é realizado, considerando-se o escoamento como compressível e incompressível e os resultados são comparados com os obtidos experimentalmente. Para isto uma equação de estado aproximada é obtida para o fluido de trabalho.

2.4.1 - Equações Governantes e Condições de Contorno para o Escoamento

As equações diferenciais governantes expressas no sistema cilíndrico para escoamento laminar bidimensional são as equações de conservação da massa e da quantidade de movimento que, assumidas as hipóteses já apresentadas anteriormente, são dadas por Bejan [32].

- Conservação da massa

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v) = 0 \quad (2.15)$$

- Conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\rho \left[\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rx}) + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (2.16)$$

- Conservação da quantidade de movimento na direção r

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} \right] = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} \quad (2.17)$$

As equações do movimento, Eqs. (2.16) e (2.17), estão em termos das tensões viscosas. É necessário, no entanto, expressar estas equações em termos dos gradientes de velocidade e na forma conservativa. Para isto deve-se substituir as componentes das tensões viscosas pelos valores expressos em função dos gradientes de velocidade, em coordenadas cilíndricas.

As componentes das tensões viscosas para fluidos Newtonianos são dadas por Burmeister [33]

$$\tau_{rx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (2.18)$$

$$\tau_{xx} = \mu \left[2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (2.19)$$

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (2.20)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{v}{r} \right) - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (2.21)$$

Passando a Eq (2.16) para a forma conservativa e substituindo-se as expressões das tensões viscosas correspondentes, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u v) - u \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} \right] = \\ - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\ 2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\mu \nabla \cdot \vec{V}) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Finalmente, simplificando e rearranjando os termos, obtém-se a equação da conservação da quantidade de movimento na direção x

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u u) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u v) = \mu \nabla^2 u - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{V}) \quad (2.23)$$

onde

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.24)$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v) \quad (2.25)$$

Da mesma forma, a Eq (2.17), em termos do gradiente de velocidade, fica

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v v) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right] + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \frac{\partial u}{\partial r} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \mu \frac{\partial v}{\partial r} \right] - \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial r} \mu \nabla \cdot \vec{V} - 2 \frac{\mu v}{r^2} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v v) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \nabla^2 v + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{V}) - 2 \frac{\mu v}{r^2} \quad (2.27)$$

onde

$$\nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial v}{\partial r} \right] \quad (2.28)$$

Para escoamento incompressível, as Eqs. (2.23) e (2.27) são dadas

por

a) para a direção x

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uu) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho uv) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (2.29)$$

b) para a direção r

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho uv) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \rho v v) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu \nabla^2 v - 2 \frac{\mu v}{r^2} \quad (2.30)$$

Finalmente, as condições de contorno para a solução numérica são dadas por:

a) Na direção x

- Fronteira de entrada ($x = 0$)

$$u = 2 \bar{U} [1 - (r/D/2)^2] \text{ (Hagen-Poiseuille)}$$

$$v = 0$$

Aqui \bar{U} é obtida a partir da vazão total $Q_t(t)$ ou Q_0

- Fronteira de saída ($x = L_t$) \Rightarrow Escoamento localmente parabólico

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

b) Na direção r

- Fronteira de simetria ($r=0$) \Rightarrow Condição de simetria

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad (\text{ou } v(r) = 0)$$

- Parede do duto ($r = \frac{D}{2}$) \Rightarrow Condição de não deslizamento

$$u = 0, \quad v = 0$$

Para aplicação da condição de escoamento localmente parabólico, o domínio de saída é tomado suficientemente grande para permitir a recomposição do escoamento. A última condição é válida também para as paredes da placa de orifício.

As Eqs. (2.15), (2.23) e a (2.27), constituem o conjunto de equações diferenciais parciais que, quando resolvidas com as condições de contorno descritas acima, descrevem o escoamento laminar compressível. Enquanto que as Eqs. (2.15), (2.29) e (2.30) descrevem o escoamento laminar incompressível.

As equações governantes descritas em coordenadas cilíndricas ou cartesianas podem ser englobadas em apenas uma equação geral, envolvendo uma propriedade geral, ϕ , da forma

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\rho v\phi) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[r^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r r^\phi \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] + S^\phi \quad (2.31)$$

As expressões do termo fonte, S^ϕ , e da difusividade, Γ^ϕ , são definidas na Tab 2.1.

TABELA 2.1

Expressões para os termos fontes e difusividades da equação geral em coordenadas cilíndricas

EQUAÇÃO	ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL			ESCOAMENTO COMPRESSÍVEL
	ϕ	Γ^ϕ	S^ϕ	S^ϕ
Conservação da massa	1	0	0	0
Movimento em x	u	μ	$-\frac{\partial P}{\partial x}$	$\frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} (\nabla \cdot \vec{v})$
Movimento em r	v	μ	$-\frac{\partial P}{\partial r} - 2 \frac{\mu_e v}{r^2}$	$\frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial r} (\nabla \cdot \vec{v})$

3 - METODOLOGIA EXPERIMENTAL

3.1 - DESCRIÇÃO GERAL E FUNCIONAMENTO DA BANCADA EXPERIMENTAL.

O esquema geral e a instalação da bancada experimental são mostrados nas Figs. 3.1 e 3.2, respectivamente. A descrição do funcionamento da bancada é realizada com o auxílio da Fig 3.1.

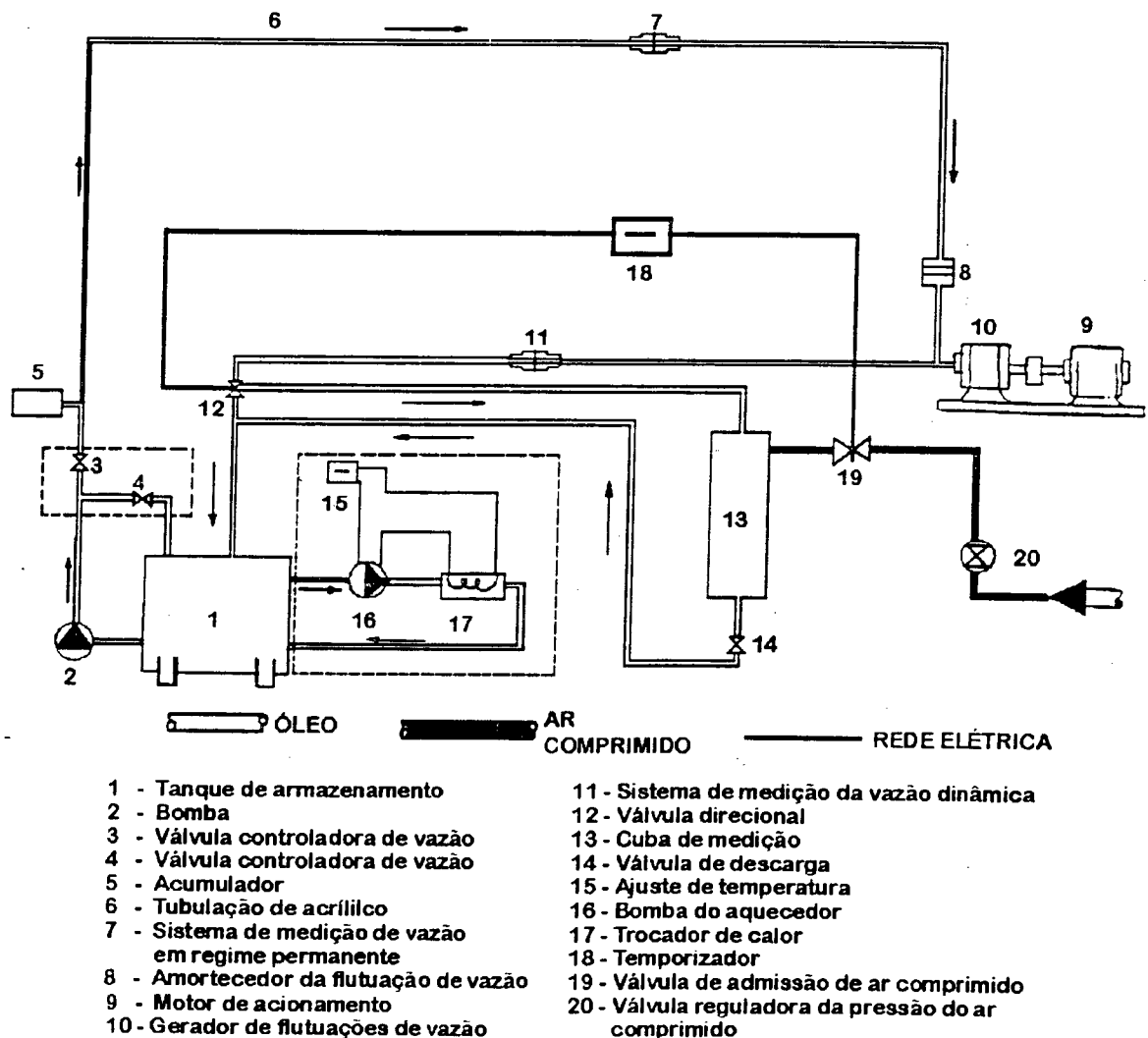


Fig. 3.1 - Esquema geral da bancada experimental.

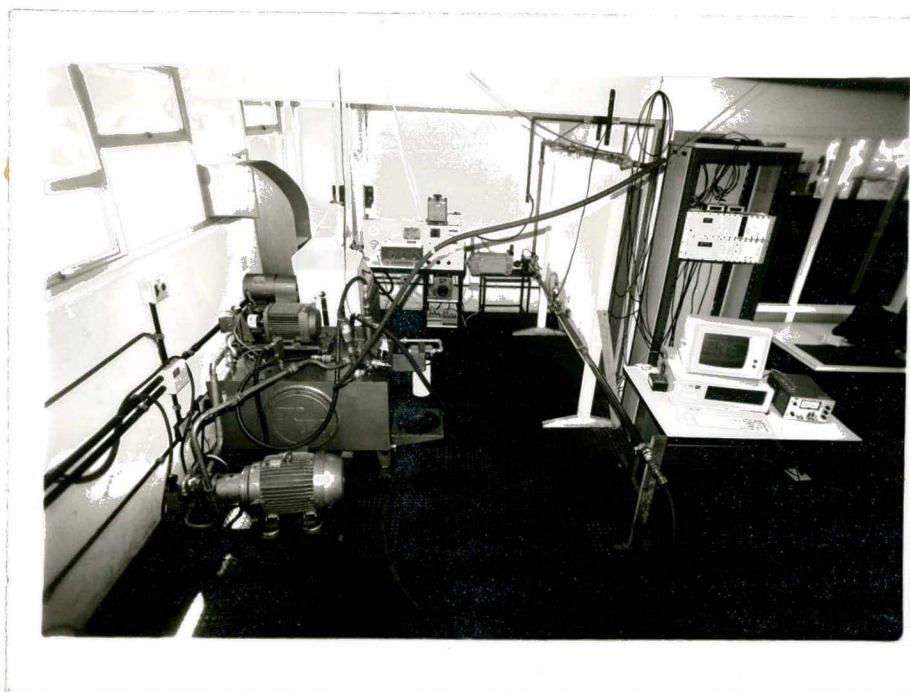


Fig. 3.2 - Fotografia da bancada experimental.

O óleo mantido à temperatura constante no tanque de armazenamento (1) é bombeado pela bomba tipo palhetas (2) a uma vazão constante Q_b , passando por um sistema de controle manual de vazão e pelo acumulador (5). O sistema de controle manual de vazão é constituído pelas válvulas controladoras de vazão (3) e (4), as quais permitem a alteração da vazão da bomba, Q_b , para uma vazão Q_o , ainda constante. Depois de eliminar as flutuações da bomba no acumulador (5), o óleo segue pela tubulação de acrílico (6) até o primeiro sistema de medição de vazão (7), onde a vazão constante, Q_o , é medida. Este sistema de medição é constituído por uma placa de orifício e dois transdutores de pressão do tipo indutivos que enviam sinais de tensão correspondentes às pressões a montante e a jusante da placa. A calibração deste sistema de medição, o qual será descrito posteriormente, fornece os valores de Q_o como uma função de ΔP através de relações do tipo $Q_o = k (\Delta P)^b$ onde k e b são constantes determinadas experimentalmente. Depois de passar pelo gerador de perda de carga (8), o óleo entra em contato com o gerador de pulsos de vazão, (10), através de uma ramificação da tubulação. Este gerador de pulsos de vazão é acionado pelo motor de corrente contínua, (9), sendo o responsável pelas

flutuações de vazão criadas em torno do escoamento médio Q_0 e captadas pelo segundo sistema de medição de vazão (11), o qual é constituído por uma outra placa de orifício e um transdutor de pressão diferencial do tipo indutivo. Quando o gerador de pulsos está desligado, ambos os sistemas de medição, (7) e (11), enviam sinais de tensão correspondentes a um valor de ΔP equivalente à vazão Q_0 . Quando o gerador de pulsos é acionado, o sistema (11), deverá indicar um $\Delta P(t)$ correspondente a uma vazão média Q_0 acrescida de uma parcela correspondente à flutuação de vazão amortecida. O gerador de perda de carga, (8), tem como finalidade evitar que esta flutuação, criada pelo gerador de pulsos, se propague para o sistema de medição (7), o qual deverá sempre indicar um ΔP correspondente à vazão Q_0 . Desta forma, o sistema de medição (7), mede sempre um ΔP correspondente a Q_0 , enquanto o sistema de medição (11), mede um $\Delta P(t)$ correspondente à vazão transiente $Q_t(t)$, constituída pela vazão média Q_0 acrescida da parcela correspondente à flutuação amortecida. A parcela $Q_p(t)$, deslocada pelo pistão do gerador de pulsos de vazão, é determinada através da equação teórica do pulso, devendo ser posteriormente corrigida em módulo e fase para obter a flutuação amortecida, tal como descrito no Cap. 2. Após passar pelo sistema de medição transiente, (11), o óleo retorna ao tanque de armazenamento, (1), passando antes pela válvula direcional, (12), a qual permite a calibração dos sistemas de medição em regime permanente, quando necessário. Este sistema de calibração de vazão para regime permanente é constituído pelo temporizador, (18), a válvula direcional, (12), a cuba de medição, (13), a válvula de descarga, (14), a válvula de admissão de ar comprimido, (19) e pela válvula redutora de pressão para o ar comprimido, (20).

Embora a calibração dos sistemas de medição de vazão (7) e (11) seja tratada especificamente na seção 3.4.6, o procedimento utilizado será descrito aqui, aproveitando-se a Fig. 3.1. Para uma vazão Q_0 e o gerador de pulsos desativado, seleciona-se o tempo de coleta de fluido no temporizador, (18). Este temporizador, quando ligado, aciona a válvula direcional, (12),

fechando o retorno para o tanque e abrindo passagem para a cuba de medição, (13), a qual deve estar com a válvula de descarga, (14), fechada. No final do tempo de coleta, o temporizador aciona novamente a válvula direcional, (12), fechando a entrada na cuba e abrindo o retorno para o tanque. Uma vez coletado o volume de fluido na cuba graduada, (13), seleciona-se a pressão de ar comprimido a ser aplicada através da válvula reguladora, (20), e abre-se a válvula de admissão, (19), por alguns instantes, até a retirada de todo fluido retido nas paredes da cuba. Uma vez fechada a válvula, (19), faz-se a medição do volume de fluido coletado durante o tempo de coleta. Para descarregar o fluido da cuba, (13), desliga-se a bomba, (2), abre-se a válvula de descarga, (14), e a válvula de admissão de ar comprimido, (19), fazendo com que o fluido retorne ao tanque de armazenamento, (1), forçado pela pressão do ar comprimido.

O sistema de aquecimento do óleo permite trabalhar com o fluido a várias temperaturas. No presente trabalho, a temperatura do óleo foi mantida a 34,5°C. Este sistema de aquecimento é constituído pelo ajuste de temperatura, (15), a bomba, (16), e o trocador de calor, (17). Quando a temperatura do óleo é menor que a selecionada no ajuste de temperatura, (15), a bomba, (16), e a resistência do trocador de calor, (17), são acionadas, até o óleo atingir a temperatura desejada no tanque de armazenamento (1).

A massa específica, ρ , e a viscosidade absoluta do óleo, μ , foram determinadas em laboratório e seus valores são mostrados na Tab 3.1, como uma função da temperatura.

Tabela 3.1 - Propriedades do fluido de trabalho

T(°C)	(g/m ³)	$\mu[\times 10^3 \text{ Pa.s}]$
20,5	859,0	71,27
25,5	856,0	57,04
30,0	852,0	43,56
34,5	848,0	36,52
40,0	842,0	27,91
50,0	836,0	19,37

Estes valores foram obtidos para uma amostra do fluido de trabalho utilizando-se pessoal técnico e os laboratórios do Departamento de Engenharia Química da UFSC.

3.2 - SISTEMAS DE MEDIÇÃO E INTERPRETAÇÃO DOS SINAIS.

Para a obtenção dos dados experimentais utilizou-se uma série de sistemas de medição e uma ampla cadeia de processamento de sinais. Além da medição de pressão estática e dinâmica, foram medidas também a rotação do eixo

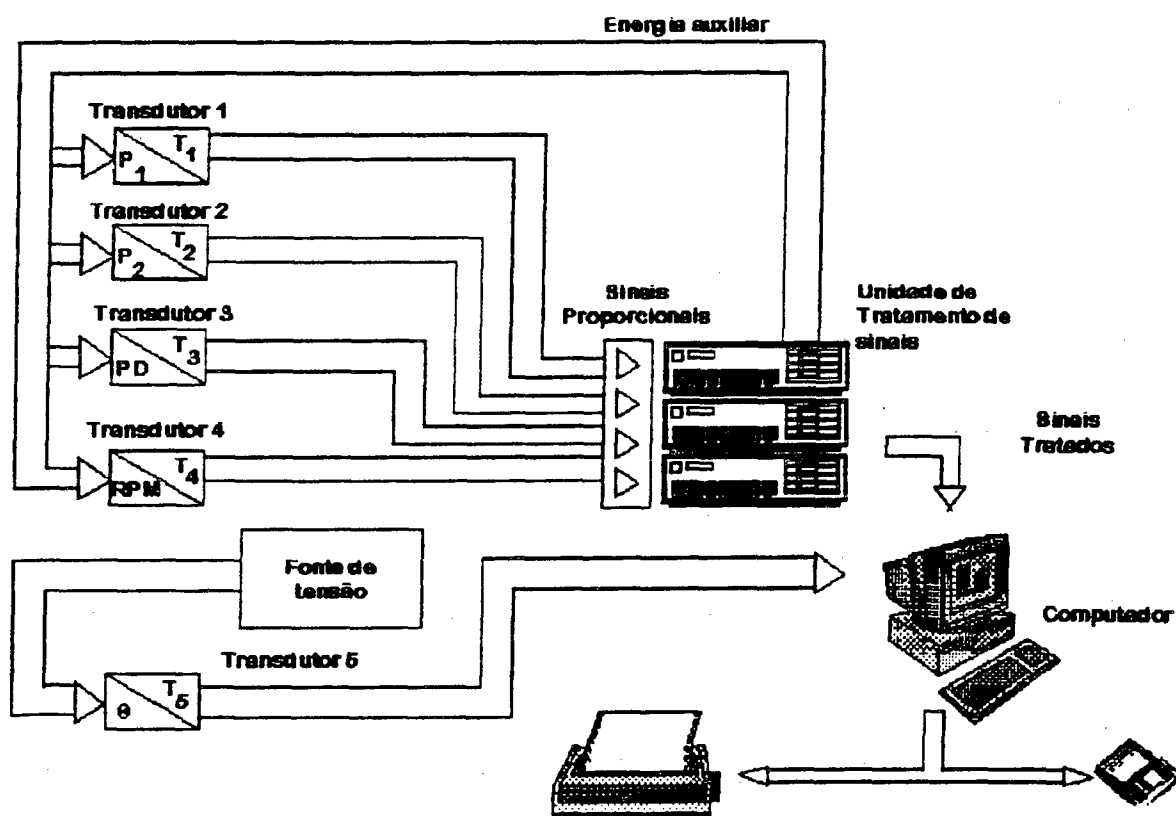


Fig. 3.3 - Cadeia de processamento dos sinais.

do gerador de pulsos e a posição do eixo, correspondente à metade do curso do pistão, na qual ocorre a sua velocidade máxima. A cadeia de medição utilizada é mostrada na Fig. 3.3.

Os sinais gerados e as grandezas de medição obtidas, com seus respectivos transdutores, são dados na Tab. 3.2.

Tabela 3.2 - Sinais gerados e grandezas medidas

Transdutor	Sinal Gerado	Grandeza de medição obtida
1	tensão	pressão absoluta
2	tensão	pressão absoluta
3	tensão	pressão diferencial
4	tensão	RPM
5	tensão	posição do pistão

Os sinais provenientes dos transdutores elétricos, como no caso dos transdutores 1, 2, 3 e 4, são geralmente de pequena amplitude e de valores bastante diversificados, sendo necessário amplificá-los e colocá-los dentro de uma faixa definida, antes de entregá-los ao módulo de indicação ou registro (Doebelin [34]). Com este objetivo foram usados pontes amplificadoras. Estas pontes incorporam as funções de tratamento de sinal, indicação, e fornecimento de energia auxiliar para os transdutores. O sinal de tensão emitido pelo transdutor 5 não passa pela unidade de tratamento de sinal, e vai diretamente para a entrada analógica do computador. Isto se deve ao fato do transdutor ser constituído por um fototransistor projetado para fornecer um pico de tensão constante e igual ao fornecido por uma fonte de tensão apropriada, no instante em que o eixo passa por uma determinada posição. Este sistema foi projetado para indicar a posição na qual o pistão do gerador de pulsos atinge a metade do seu curso, sendo este o ponto onde, teoricamente, ele atinge a sua velocidade máxima.

Os transdutores 1, 2 e 3 são transdutores de pressão previamente

calibrados em conjunto com a unidade de tratamento de sinal correspondente. A calibração conjunta (transdutor-ponte amplificadora) destes transdutores permitiu a obtenção da função transferência e curvas de erro globais dos sistemas de medição.

A calibração do transdutor 4 foi realizada utilizando-se o sinal do transdutor 5, o qual permitiu obter, sem margem de erro, o número de rotações efetuadas pelo eixo durante o tempo de aquisição dos sinais. A aquisição dos sinais foi realizada através de um microcomputador, utilizando-se um programa de aquisição dinâmica de dados. Um tempo de 2 segundos foi utilizado para todas as aquisições. O número de intervalos de tempo foi constante (497 intervalos) para qualquer tempo de aquisição selecionado.

A partir dos sinais obtidos e das informações de calibração dos transdutores, obtiveram-se as grandezas de medição correspondentes e, conseqüentemente, os dados experimentais desejados, tais como vazões transientes, coeficientes de descarga, etc.

Devido à relativa complexidade do experimento, antes de partir para a etapa de obtenção das grandezas de medições e dos resultados experimentais, torna-se necessário, para uma melhor compreensão, fornecer uma descrição detalhada do funcionamento do sistema de geração de pulsos de vazão e de outros componentes da bancada.

3.3 - SISTEMA DE GERAÇÃO DE PULSOS DE VAZÃO.

3.3.1 - Preliminares

Tendo em vista a necessidade de calibração dinâmica das placas de orifício, tornava-se necessária a aquisição de um sistema padrão de medição de

vazão dinâmica que permitisse levantar a função transferência real e as curvas de erro do sistema de medição proposto. Como estes sistemas de medição padrão são de custo extremamente elevado, (sistemas óticos ou laser), tornava-se quase impossível a realização do experimento. A idéia de criar uma flutuação de vazão conhecida no escoamento a partir do movimento harmônico de um pistão levou a utilizar, primeiramente, um dispositivo pistão-cilindro acoplado a um sistema biela manivela. A dinâmica deste mecanismo é mostrada na Fig. 3.4.

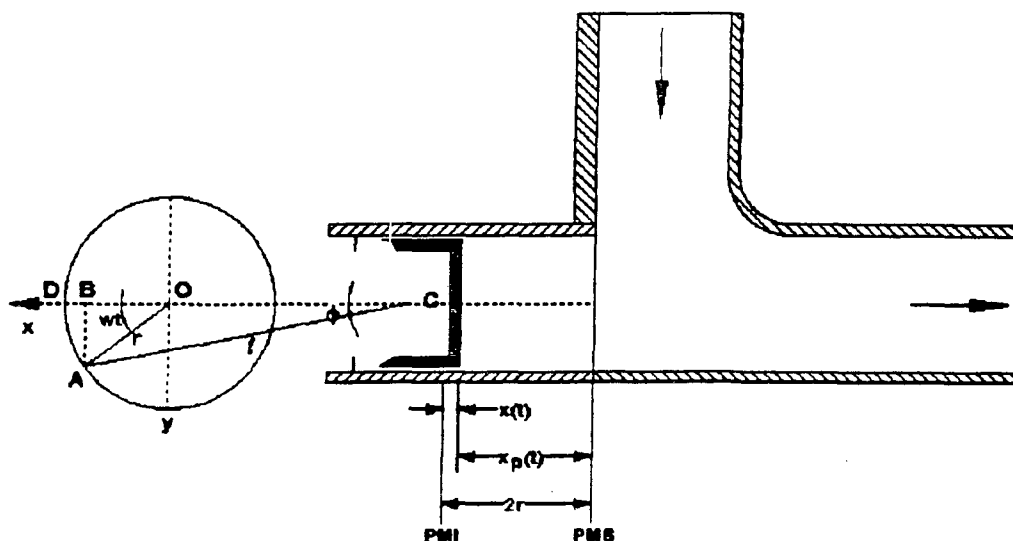


Fig. 3.4. Dinâmica do sistema biela-manivela ligado a um mecanismo pistão-cilindro

Para uma rotação constante do eixo pode-se obter a equação de deslocamento do pistão. Baseado na Fig. 3.4, tem-se

$$DB = r \left[1 - \cos wt \right] \quad (3.1)$$

da mesma forma,

$$AC - BC = \ell \left[1 - \cos \phi \right] \quad (3.2)$$

e

$$AB = \ell \sin \phi = r \sin wt \quad (3.3)$$

ou

$$\sin \phi = \frac{r \sin wt}{\ell} \quad (3.4)$$

utilizando a identidade

$$\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1 \quad (3.5)$$

e com auxílio da Eq. (3.4), obtém-se

$$\cos \phi = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 wt} \quad (3.6)$$

Finalmente, obtém-se a equação do deslocamento do pistão, $x(t)$

$$x(t) = r [1 - \cos wt] + \ell \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 wt} \right] \quad (3.7)$$

e a equação da distância, $x_p(t)$, fica

$$x_p(t) = r [1 + \cos wt] - \ell \left[1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 wt} \right] \quad (3.8)$$

A partir da Eq. (3.7), obtém-se a expressão da velocidade, $\dot{x}(t)$,

dada por

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = r w \sin wt \left[1 - \frac{r}{\ell} \cos wt \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2} \sin^2 wt \right)^{-1/2} \right] \quad (3.9)$$

Desta forma, o pulso de vazão produzido pelo pistão pode ser conhecido em qualquer instante através da equação

$$Q_p(t) = A_c \dot{x}(t) \quad (3.10)$$

onde

r = raio do excêntrico (manivela) (m)

ℓ = comprimento da biela (m)

ωt = ângulo do virabrequim, iniciado no PMI do cilindro (rad.)

ω = $2\pi f$ = frequência angular (rad/s)

t = tempo (s)

f = frequência cíclica (1/s)

D_c = diâmetro do cilindro (m)

A_c = área do cilindro (m^2)

Para evitar vazões nulas e negativas e principalmente para aumentar o nível de pressão do sistema foi acrescentada uma vazão constante, Q_0 , de maneira que a vazão instantânea total é dada por,

$$Q_t(t) = Q_0 + Q_p(t) \quad (3.11)$$

O grande desafio, neste caso, é conseguir medir os parâmetros necessários que permitam obter com precisão os valores de $Q_t(t)$. Para isto, além dos parâmetros já mencionados, torna-se necessária também a calibração estática das placas de orifício para a determinação de Q_0 , além do cálculo das perdas por vazamento através da folga pistão-cilindro, $Q_z(t)$.

Por outro lado, o sistema biela-manivela, embora produza no êmbolo um movimento periódico, este não é harmônico. Observando-se a Eq. 3.9, nota-se que se a biela for infinitamente grande ($\ell \rightarrow \infty$), o termo da equação que contém ℓ como denominador desaparece e a equação da velocidade fica

$$\dot{x}(t) = r \omega \sin \omega t \quad (3.12)$$

A Eq. (3.12) representa o movimento harmônico do pistão. No entanto, uma biela muito comprida tornaria o sistema instável, além de acarretar problemas construtivos. Por outro lado, com a biela curta, o movimento se desvia da senóide de forma considerável, originando um movimento periódico não harmônico do pistão, como o representado pela Eq. (3.9).

3.3.2 - O gerador de pulsos utilizado

Tendo em vista os problemas mencionados no item anterior e considerando-se que é de interesse a geração de um pulso conhecido de vazão, optou-se pela utilização de um sistema do tipo garfo escocês (scotch yoke) para acionamento do mecanismo pistão-cilindro. Este mecanismo gera um movimento senoidal do pistão, como o representado pela Eq. (3.12), e é mostrado na Fig. 3.5.

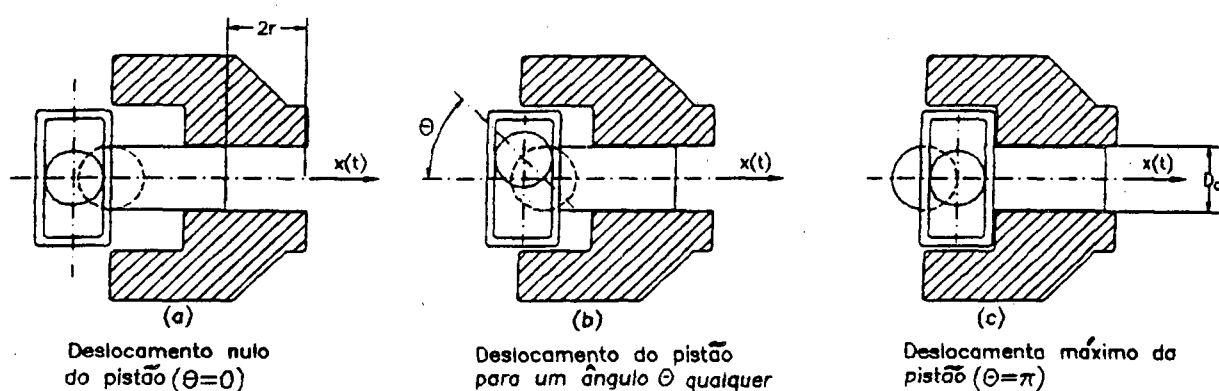


Fig. 3.5 - Sistema pistão-cilindro acionado pelo mecanismo tipo garfo escocês.

Com este mecanismo, o pistão desloca-se em movimento alternativo obedecendo a lei do seno

$$x(t) = C_1 \sin \theta + C_2 \cos \theta + C_3 \quad (3.13)$$

onde C_1 , C_2 e C_3 são constantes a determinar e $\theta = \omega t$ é o ângulo de acionamento do eixo motor.

Para a obtenção das constantes podem-se aplicar as seguintes condições de contorno

$$\begin{aligned} \theta = 0 &\longrightarrow x(t) = 0 \\ \theta = \pi/2 &\longrightarrow x(t) = r \\ \theta = \pi &\longrightarrow x(t) = 2r \end{aligned} \quad (3.14)$$

Resolvendo-se o sistema gerado pela substituição da Eq. (3.14) em (3.13), obtém-se o deslocamento

$$x(t) = r[1 - \cos \theta] = r[1 - \cos \omega t] \quad (3.15)$$

e para a velocidade

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = r \omega \sin \omega t \quad (3.16)$$

A Eq. (3.16) é idêntica à Eq. (3.12), obtida a partir do sistema biela-manivela, quando a biela era de comprimento infinito. A vazão instantânea deslocada pelo pistão é dada então pela Eq. (3.10). Como mencionado no Cap. 2, a vazão gerada pelo deslocamento do pistão deve ser corrigida em módulo e fase para considerar os efeitos dissipativos da flutuação que ocorrem na canalização existente entre o gerador de flutuações e a placa de orifício.

3.3.3 - Construção do gerador de pulsos de vazão

No Brasil, o mecanismo tipo garfo escocês é empregado em compressores de pequeno deslocamento e alta rotação, como os utilizados em geladeiras. A EMBRACO (Empresa Brasileira de Compressores) fabrica estes compressores com 4 capacidades diferentes (compressores PW). O mecanismo de um destes compressores foi utilizado para a construção do gerador de pulsos de vazão. O mecanismo do compressor PW de deslocamento igual a $3,47 \text{ cm}^3$ foi escolhido para ser utilizado, por apresentar vazões dentro da faixa previamente definida e o menor curso de pistão (9,82 mm), produzindo menor vibração do sistema. Para adaptação do mecanismo ao sistema hidráulico e poder utilizá-lo como um gerador de oscilações de vazão, foi necessária a execução das seguintes modificações principais:

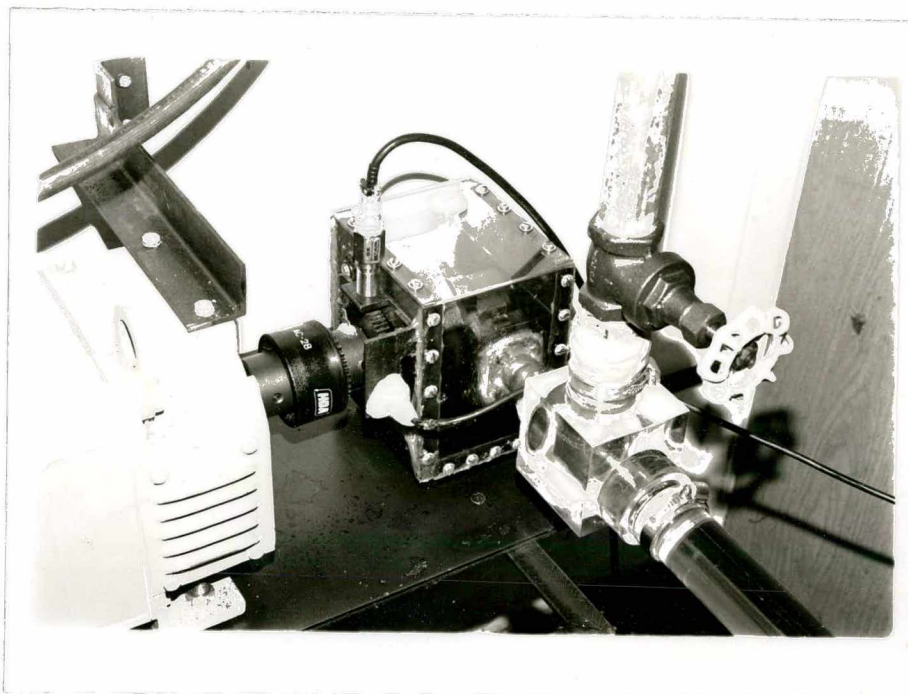


Fig. 3.6 - Fotografia do gerador de pulsos de vazão.

- retirada do cabeçote com as válvulas de admissão e descarga e substituição por um flange para fazer a conexão do cilindro diretamente com o interior da tubulação de acrílico;
- projeto do sistema de lubrificação para os mecanismos de garfo escocês e pistão-cilindro;

- projeto do sistema de acoplamento do eixo do gerador de pulsos com o motor de acionamento;
- seleção do motor de acionamento;
- instalação do sistema elétrico de acionamento do motor para a variação de rotação;
- instalação do sistema de medição de rotação.

A Fig. 3.6 mostra uma fotografia da instalação do gerador de pulsos de vazão

A Fig. 3.7 mostra o compressor PW 3,5K7 fornecido pela EMBRACO e o sistema de geração de pulsos de vazão usado na bancada experimental, depois das modificações. No sistema modificado, a imersão do compressor dentro do óleo hidráulico contido na carcaça, garante a perfeita lubrificação do sistema.

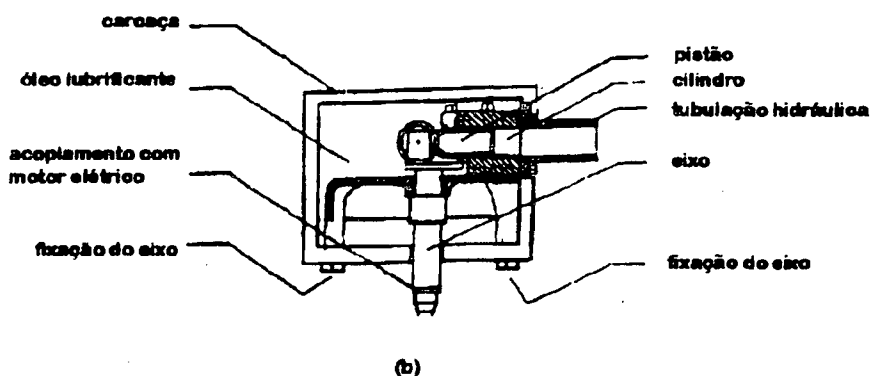
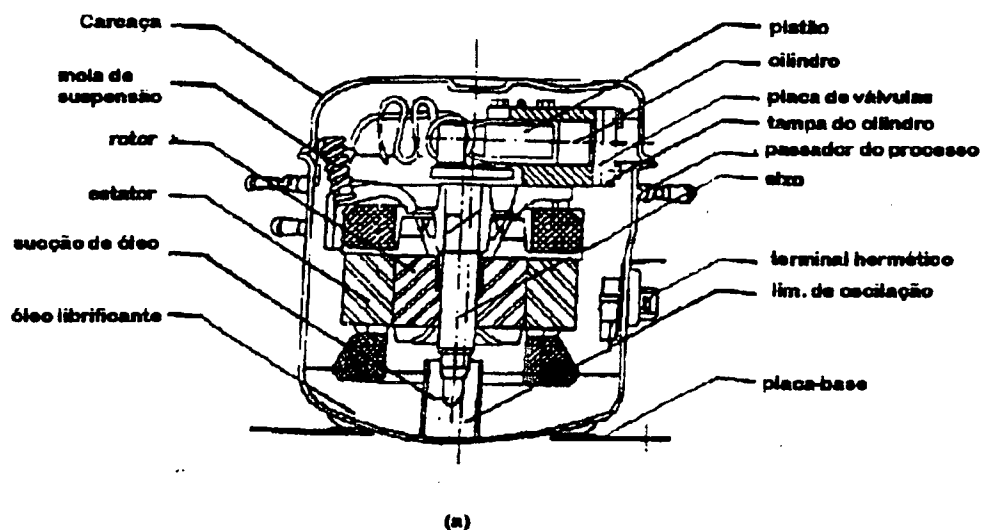


Fig. 3.7 - (a) Compressor PW 3.5K7 fabricado pela Embraco.

(b) Gerador de pulsos de vazão utilizado no experimento

3.3.4 - Cálculo aproximado das perdas devidas a vazamento de fluido através da folga radial pistão-cilindro.

Para finalizar o nosso estudo do gerador de pulsos de vazão, falta ainda determinar os parâmetros físicos e geométricos envolvidos no vazamento de fluido através da folga radial pistão-cilindro.

Esse vazamento depende fundamentalmente da magnitude da folga radial e da pressão interna do escoamento onde a flutuação será criada. A posição e a velocidade do pistão também exercem influência sobre o vazamento, mas em menor grau (Mansur [35]).

No presente caso, devido a alta viscosidade do fluido de trabalho, as perdas por vazamento através da folga radial pistão-cilindro são relativamente pequenas, mas deverão ser consideradas, principalmente para o caso de frequências maiores.

Ferreira [36], analisou o fenômeno considerando todos esses fatores na análise de desempenho de um compressor hermético alternativo e obteve as equações que serão apresentadas neste trabalho. Na Fig. 3.8, encontram-se representados os principais parâmetros envolvidos no problema. Como o pistão não emprega anéis de vedação e a folga radial possui dimensões bastante reduzidas ($0,015 \pm 0,0015$ mm) pode-se assumir que o escoamento através da folga seja laminar. Desprezando-se as forças de inércia e considerando-se as hipóteses de fluido Newtoniano e escoamento plenamente desenvolvido, incompressível, a equação de Navier Stokes fica

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \quad (3.17)$$

e os parâmetros envolvidos são:

V_p = velocidade instantânea do pistão (m/s);

V_z = velocidade instantânea do fluido (m/s);

p = pressão no interior do cilindro (Pa);

p_s = pressão no ambiente da carcaça (pressão atmosférica Pa).

R = raio do cilindro (m);

kR = raio do pistão (m);

L = comprimento do trecho de escoamento (m);

ρ = massa específica do fluido (kg/m^3);

r = excentricidade do garfo escocês (m);

L_o = comprimento mínimo de contato pistão/cilindro (m).

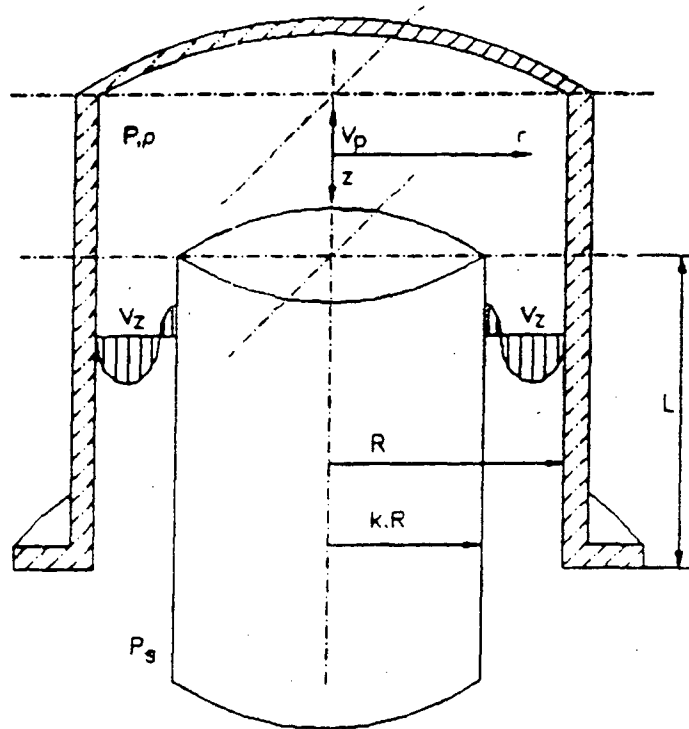


Fig. 3.8 - Parâmetros físicos e geométricos envolvidos no vazamento de fluido através da folga radial pistão/cilindro.

Integrando-se a Eq. (3.17) obtém-se

$$- \left[P - P_s \right] - \mu L \left[\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] = 0 \quad (3.18)$$

ou

$$-\frac{r}{L} \left[P - P_s \right] = \frac{\partial}{\partial r} \left[\mu r \frac{\partial V_z}{\partial r} \right] \quad (3.19)$$

integrando duplamente em r , encontra-se

$$\frac{\partial V_z}{\partial r} = -\frac{r}{4\mu L} \left[P - P_s \right] - \frac{C_1}{\mu r} \quad (3.20)$$

$$V_z = -\frac{r^2}{4\mu L} \left[P - P_s \right] - \frac{C_1}{\mu} \ln r + C_2 \quad (3.21)$$

As condições de contorno são dadas por

$$\begin{aligned} r = kR &\longrightarrow V_z = -V_p \\ r = R &\longrightarrow V_z = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

obtendo-se

$$C_1 = \frac{\mu V_p}{Lk} + \frac{(1-k^2) R^2}{4L \ln k} \left[P - P_s \right] \quad (3.23)$$

e

$$C_2 = \frac{V_p}{\ln k} \ln R + \frac{R^2}{4\mu L} \left[P - P_s \right] \left[\frac{(1-k^2)}{\ln k} \ln R + 1 \right] \quad (3.24)$$

Substituindo as Eqs. (3.23) e (3.24) em (3.21), obtém-se

finalmente

$$V_z = -\frac{V_p}{\ln k} \ln \left(\frac{r}{R} \right) + \frac{(P-P_s)R^2}{4\mu L} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{(1-k^2)}{\ln k} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \right] \quad (3.25)$$

O perfil de velocidade do escoamento anular pode ser obtido variando-se o raio r , desde kR até R , na Eq. (3.25).

A velocidade média instantânea \bar{V}_z , necessária para o cálculo do fluxo de massa é definida a partir deste perfil de velocidades, da seguinte forma

$$\bar{V}_z = \frac{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R V_z r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_{kR}^R r dr d\theta} \quad (3.26)$$

obtendo-se, depois da integração e rearranjo dos termos, a seguinte expressão para \bar{V}_z

$$\bar{V}_z = \frac{V_p (1-k^2+2k^2 \ln k)}{2 (1-k^2) \ln k} + \frac{(P-P_s) R^2}{8\mu L} \left[\frac{1-k^4}{1-k^2} + \frac{1-k^2}{\ln k} \right] \quad (3.27)$$

onde V_p é dada pela Eq. (3.16) e o comprimento do trecho, L , é dado pelo comprimento mínimo de contato pistão/cilindro, L_0 , mais o deslocamento instantâneo, L_s .

$$L = L_0 + L_s \quad (3.28)$$

onde L_s é dado pela Eq. (3.15).

A vazão instantânea através da folga pistão/cilindro, Q_z , é dada por

$$Q_z(t) = \bar{V}_z \cdot A \quad (3.29)$$

ou, finalmente,

$$Q_z(t) = \bar{V}_z \pi R^2 (1 - k^2) \quad (3.30)$$

3.4 - SISTEMA DE MEDIÇÃO DE VAZÃO.

3.4.1. Características do Escoamento.

O escoamento para o qual foi projetado o sistema de medição de vazão utilizado, apresenta 3 características principais. São elas:

- a) escoamento a baixo número de Reynolds ($Re < 5 \times 10^3$);
- b) escoamento em tubulações de diâmetros pequenos ($D < 40\text{mm}$);
- c) escoamento transiente.

Os sistemas de medição de vazão convencionais de placas de orifício são normalizados para tubulações de diâmetro não inferior a 40mm e para escoamentos com número de Reynolds acima de 5×10^3 . As principais normas tais como a DIN 1952 [37], a ISO 5167-1980 [38] e outras como a ASME [39], não especificam valores para os coeficientes de descarga e nem apresentam as características construtivas das placas para tubulações de diâmetros pequenos ($D < 40\text{mm}$) e escoamentos com números de Reynolds baixos ($Re < 5 \times 10^3$).

Das normas estudadas, apenas a AFNOR NF 10-101 [40], faz menção ao tipo de orifício utilizado para escoamentos a baixo número de Reynolds. A idéia de seguir uma determinada norma para construção do nosso sistema de medição de vazão utilizando placa de orifício torna-se mais difícil ainda pelas características transientes apresentadas pelo escoamento. Por este motivo, não foi possível utilizar uma norma específica, mas sim, vários aspectos das normas mencionadas acima foram considerados, além do bom senso e a funcionalidade do sistema.

3.4.2 - As Placas de Orifício

Placas com dois tipos de orifício foram construídas. O primeiro é o orifício convencional com aresta viva, fabricado conforme a norma DIN 1952, [37], ou ISO 5167 - 1980, [38], tal como mostrado na Fig. 3.9. O segundo é o orifício de entrada cônica, fabricado segundo a norma AFNOR NF 10-101, [40], adequado para escoamentos a baixo número de Reynolds. Segundo Delmee [2], o orifício convencional com aresta viva tal como mostrado na Fig. 3.9, não apresenta coeficientes de vazão constantes quando o número de Reynolds for relativamente baixo. O orifício de entrada cônica, tal como mostrado na Fig. 3.10, é usado em aplicações onde o número de Reynolds inferior varia entre 25 a 75, de acordo com o valor da relação de diâmetros. Baseado nas Figs. 3.9 e 3.10, a Tab. 3.3 contém as dimensões das placas utilizadas no experimento e usinadas conforme norma DIN 7168.

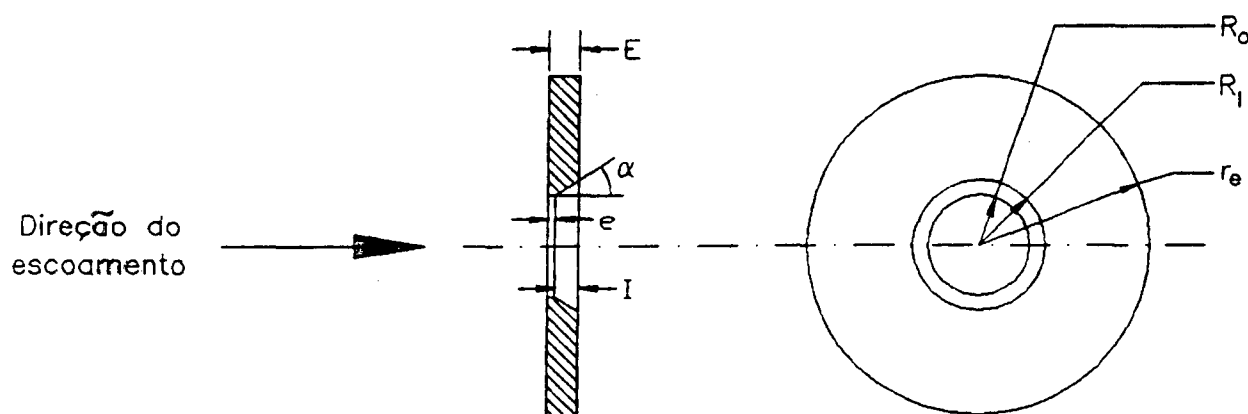


Fig. 3.9 - Placa convencional com aresta viva.

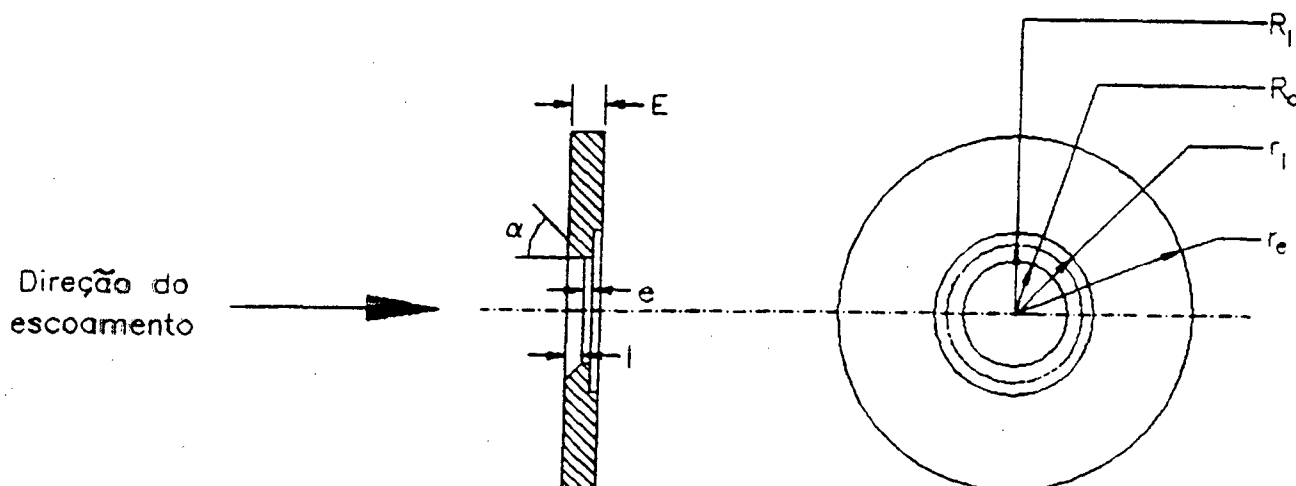


Fig. 3.10 - Placa de entrada cônica.

TABELA 3.3 - Dimensões das placas (mm)

Placas convencionais com aresta viva									
d/D	Ro	r _e	E	e	I	α	Ri	Denominação da placa	
0,2	2,9	28,5	3,0	3,0	0	0,0	2,90	S1	
	2,9	28,5	3,0	0,5	2,5	15,0	3,55	S2	
	2,9	28,5	3,0	0,5	2,5	30,0	4,35	S3	
	2,9	28,5	3,0	0,5	2,5	45,0	5,40	S4	
Placa de entrada cônica									
d/D	Ro	r _e	E	e	I	α	Ri	rI	
0,2	2,90	28,5	3,0	0,2	0,5	45,0	3,4	5,80	E1

O material utilizado para a construção das placas é o bronze. Depois de usinadas as placas foram lapidadas até obter uma superfície espelhada do lado frontal e uma planicidade menor que 0,025mm. Todas as outras especificações indicadas em norma, tais como espessura mínima, tolerância sobre diâmetros, etc., foram respeitadas.

3.4.3 - Tomadas de pressão e fixação das placas

Para placas de orifício usadas em tubulações de pequenos diâmetros, o tipo de tomada de pressão recomendada pelas normas é a de canto (corner taps). Esta tomada de pressão foi feita como recomendado por Delmee [2], fazendo ranhuras anelares e formando câmaras piezométricas de cada lado da placa. A fixação das placas foi feita com auxílio de flanges de acrílico, nas quais foram colocadas as tomadas de pressão em ambos os lados da placa. A Fig. 3.11 mostra o esquema geral de fixação das placas com as tomadas de pressão e uma fotografia da instalação de cada sistema de medição de vazão utilizado. Todas as demais especificações recomendadas em [2], referentes à tomada de pressão foram respeitadas.

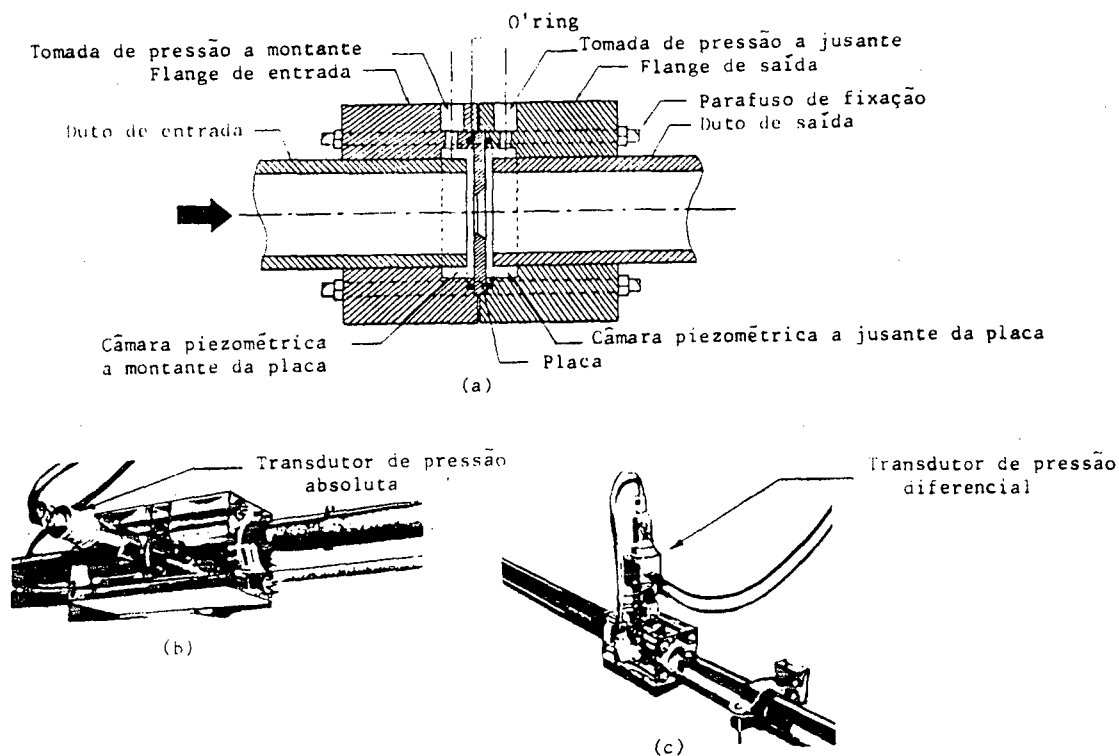


Fig. 3.11 - a) Esquema geral das tomadas de pressão e fixação das placas.
 b) Sistema de medição de vazão constante.
 c) sistema de medição de vazão dinâmica

3.4.4 - O coeficiente de compressibilidade isotérmico

Por definição (Merriam [4]), o coeficiente de compressibilidade isotérmico, β , pode ser determinado pela expressão

$$\beta = \frac{\Delta P}{\Delta V} V_0 \quad (3.31)$$

onde

V_0 = volume inicial total (m^3)

ΔP = variação de pressão (Pa)

ΔV = variação total de volume (m^3)

O efeito mola do fluido hidráulico é caracterizado pelo coeficiente de compressibilidade isotérmico, β . Este coeficiente é substancialmente afetado pela presença de ar e pela deformação elástica dos elementos que contêm o fluido (estrutura).

Para fluidos derivados de petróleo, isentos de ar, em cavidades sem deformação, Merrit [04] fornece valores de β na faixa de $14 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, para óleos convencionais a $17 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ para óleos de uso aeronáutico. No entanto, segundo Stringer [41], uma drástica redução destes coeficientes efetivos ocorre devido à expansão de tubulações e cavidades flexíveis, que, ainda sem a presença de ar, podem atingir valores bem menores que $7 \times 10^8 \text{ N/m}^2$. Por este motivo, não é conveniente, para trabalhos de caráter científico, a utilização de valores de β fornecidos pela literatura, já que estes, geralmente, referem-se apenas ao fluido de trabalho. Neste caso, torna-se necessário a obtenção experimental de um β efetivo, de maneira que a presença de ar no fluido e as características elásticas do sistema sejam consideradas.

Um outro aspecto que contribui para a queda dos valores de β , é o nível de pressão utilizado. Para pressões relativamente baixas, como as utilizadas no presente trabalho (1 a 7 bar), as variações de volume com a pressão são mais acentuadas, diminuindo drasticamente os valores de β . Os níveis baixos de pressão favorecem a formação de ar livre, enquanto que níveis elevados de pressão contribuem ao aumento de ar diluído no sistema. Sendo apenas a presença de ar livre a maior responsável pelo aumento da compressibilidade do sistema, pode-se deduzir que a níveis de pressão relativamente baixos, os valores de β serão ainda mais afetados, sofrendo uma drástica redução, devido à maior quantidade de ar livre existente.

Um cálculo aproximado do volume de ar diluído em óleos minerais pode ser obtido em função da pressão de trabalho do sistema (Stringer [40]), como

$$V_d = S \frac{P}{P_0} V_\ell \quad (3.32)$$

onde

V_d = volume de ar diluído [m^3]

V_ℓ = volume total do líquido [m^3]

S = coeficiente de solubilidade (0,06% a 0,12%)

P = pressão na cavidade

P_0 = pressão atmosférica

ou

$$\frac{V_d}{V_\ell} = S \frac{P}{P_0} \quad (3.33)$$

Procedendo-se desta forma, e considerando-se uma pressão de trabalho entre 1,6 e 7 bar, por exemplo, obtém-se uma faixa de ar diluído entre 0,15% a 0,45%, para um coeficiente de solubilidade médio. Embora este ar diluído não afete muito a compressibilidade do óleo a um nível mais elevado de pressão, à medida que a pressão diminui este ar diluído passa a se tornar ar livre dentro da cavidade, aumentando drasticamente a compressibilidade do fluido. Na prática, para níveis de pressões positivas este ar é facilmente eliminado através de uma desaeração correta do sistema. Testes para o caso de pressões ligeiramente negativas mostraram a formação instantânea de bolhas de ar livre na cavidade, sem que nenhuma infiltração de ar tenha ocorrido para dentro do sistema. Neste caso, a eliminação do ar torna-se mais difícil, e uma cavitação forte é observada na placa do orifício. Isto ocorre quando o pistão do gerador de pulsos atinge velocidades negativas (sucção), com a vazão Q_0 nula.

Conhecendo-se o volume de ar livre presente por unidade de volume de óleo e assumindo uma estrutura rígida da cavidade, o módulo de compressibilidade efetivo, β_0 , é estimado por Stringer [41]

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{V_a}{V_0} \frac{1}{P} \quad (3.34)$$

Como visto anteriormente, o valor aproximado do volume de ar diluído a uma pressão de 5 bar é de 0,45%. Quando a pressão for de 1,6 bar, a quantidade de ar livre formado será de $0,45\% - 0,15\% = 0,30\%$. Imaginando-se que a 5 bar a cavidade esteja isenta de ar livre, somente a passagem de 5 para 1,6 bar no nível de pressão, acrescentará 0,3% de ar livre na instalação. Se imaginarmos que 0,20% de ar livre seja eliminado através de desaeração adequada, os restantes 0,1% serão responsáveis pela queda do coeficiente de compressibilidade efetivo, β , de $14 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ para $1,436 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, representando uma redução de aproximadamente 10 vezes.

Por outro lado, para uma cavidade cilíndrica de diâmetro interno d_1 e diâmetro externo d_2 , feita com material de módulo de Young, E , e módulo de Poisson, ν_p , o coeficiente de compressibilidade efetivo é dado por Stringer [41]

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{d_1 + d_2}{E(d_1 - d_2)} \quad (3.35)$$

para cilindros com paredes finas (espessuras menores que $d_2/10$), ou

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta_0} + \frac{2}{E} \left[\frac{d_2^2 + d_1^2}{d_2^2 - d_1^2} + \nu_p \right] \quad (3.36)$$

para cilindros com paredes grossas.

No caso do duto de acrílico, para o qual $E = 2,85 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $\nu = 0,36$, $d_1 = 0,029 \text{ m}$, $d_2 = 0,041 \text{ m}$ e contendo óleo com $\beta_0 = 14 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, obtém-se um coeficiente de compressibilidade efetivo, calculado aproximadamente através da Eq. (3.35), de $3,62 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, o qual representa uma redução drástica, quando comparado com o valor atribuído somente ao óleo.

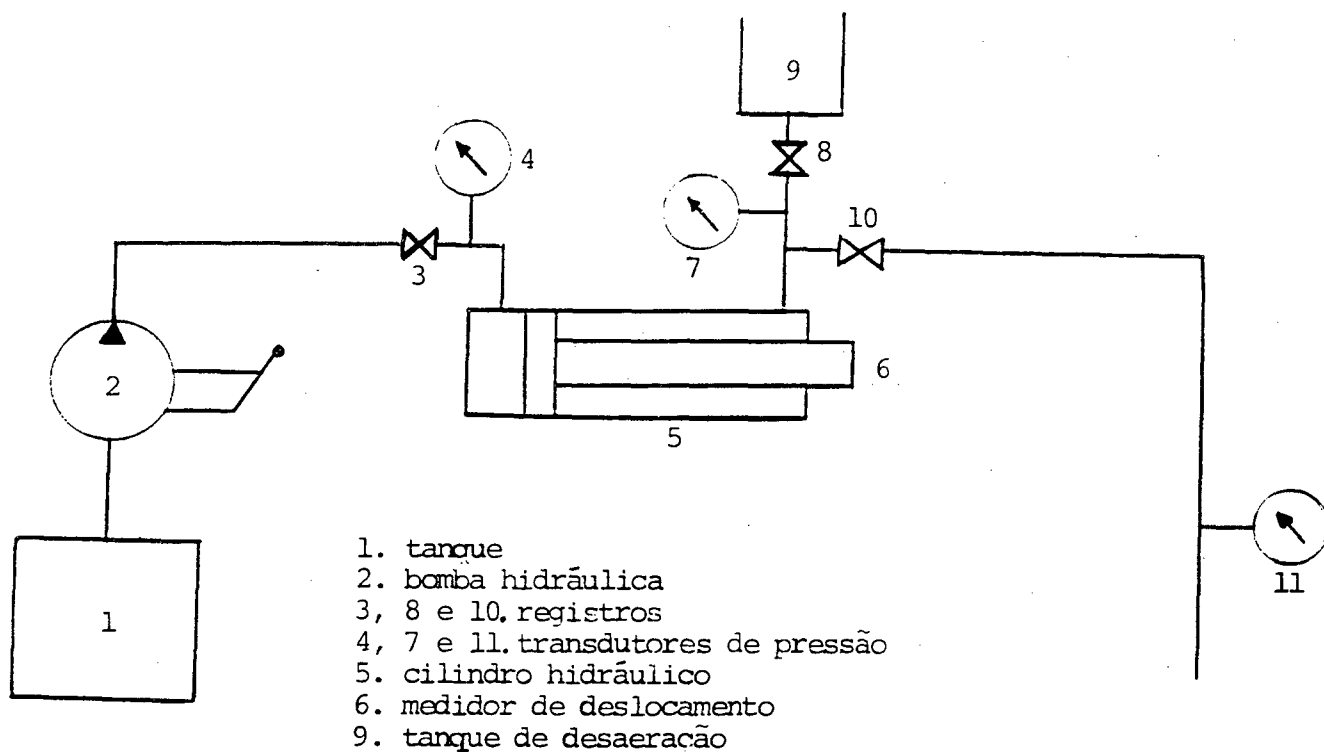
Na prática, o ar livre presente e a dilatação da cavidade, são dados difíceis de serem quantificados no sistema real. Por este motivo, no presente trabalho, os valores de β efetivo são determinados experimentalmente. Valores de $1,2 \times 10^8$ a $2,7 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ foram encontrados experimentalmente para o coeficiente de compressibilidade isotérmico na faixa

de pressões entre 1 e 7 bar, confirmando as expectativas previstas por Striger [41].

3.4.5 - Determinação do Coeficiente de Compressibilidade Efetivo através de parâmetros medidos experimentalmente.

A grande influência exercida pela compressibilidade do conjunto fluido-estrutura no comportamento de um sistema dinâmico, ligado ao fato da escassez de dados confiáveis na literatura, ressaltaram a necessidade da determinação experimental da compressibilidade do sistema (fluido + estrutura). Para isto, coeficientes de compressibilidades efetivos foram determinados experimentalmente em função da pressão de trabalho.

A Fig. 3.12 mostra o esquema geral do sistema hidráulico construído para a determinação destes parâmetros. A bomba hidráulica manual, 2, aciona o cilindro hidráulico 5, no qual o êmbolo se deloca para direita, comprimindo o fluido de trabalho na outra câmara. O medidor de deslocamento, 6, colocado na ponta da haste do cilindro, mede a variação instantânea do curso do pistão. Ao mesmo tempo, a variação de pressão é medida diretamente através dos transdutores de pressão 4, 7 e 11. O registro 8, junto com o recipiente de fluido, 9, é utilizado para desaeração do sistema. O registro 10, liga a câmara de compressão do cilindro hidráulico diretamente com o sistema de medição de vazão. Desta forma, o deslocamento do êmbolo para a direita, através da bomba 2, comprime todo o sistema de medição de vazão até a pressão desejada.



compressibilidade efetivo

Para a obtenção de ΔP e ΔV , o seguinte procedimento é utilizado.

1. liga-se a bomba do sistema de medição de vazão, com o registro 10 aberto para retornar o êmbolo do cilindro hidráulico para a posição zero.
2. Com a bomba ligada desaera-se o sistema através do registro 8, e do recipiente 9. Faz-se também a desaeração das placas de orifício e dos transdutores de pressão.
3. Desliga-se a bomba, fechando-se instantaneamente o retorno e a alimentação do sistema de medição de vazão. Desta forma todo o sistema de medição de vazão passa a formar parte da câmara de compressão através do registro 10.
4. Inicia-se o bombeamento manual através da bomba 2 até as pressões requeridas, medidas através dos transdutores de pressão 7 e 11. Ao atingir a pressão desejada faz-se a medição do deslocamento da haste, através do medidor de deslocamento 6.

5. Para a medição de um novo deslocamento repete-se a operação a partir do item 1.

Para medir apenas a compressibilidade do fluido, fecha-se o registro 10 e comprime-se o fluido até a pressão desejada, indicada através do transdutor de pressão 7.

A Fig. 3.13 mostra a variação de β efetivo para a faixa de pressões utilizada no presente trabalho. Os valores obtidos podem ser considerados com incerteza de 5%.

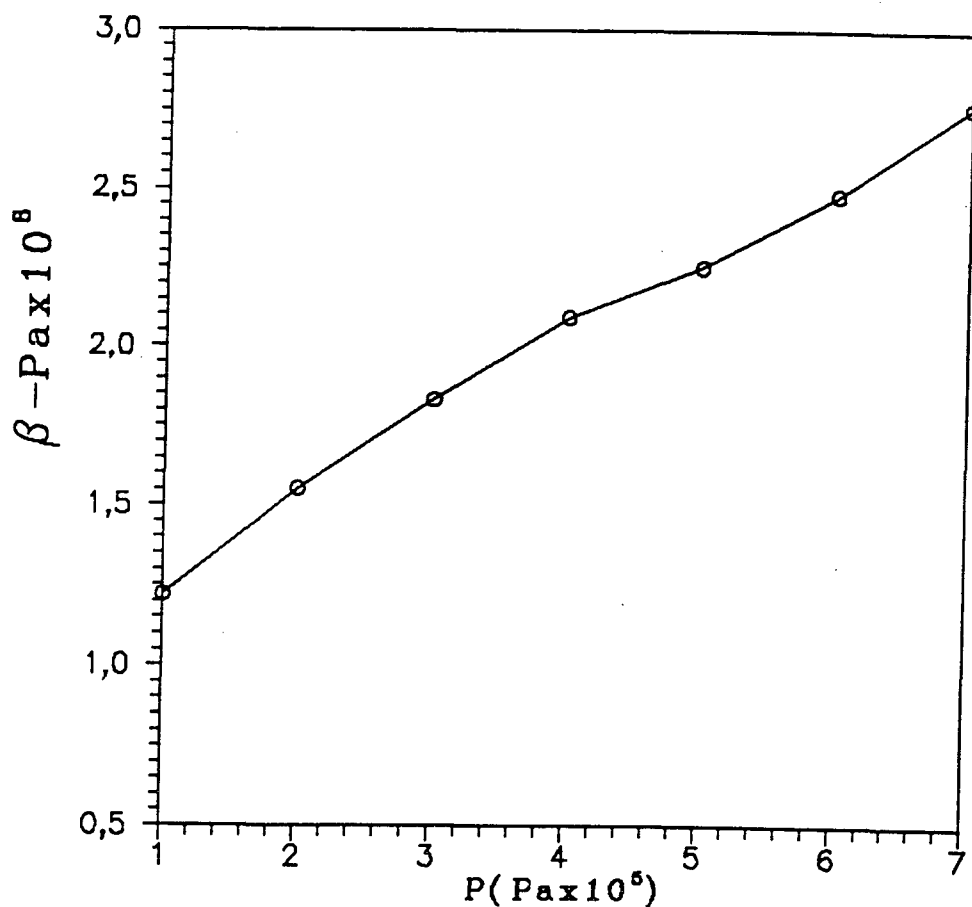


Fig. 3.13 - Valores experimentais de β efetivo para a faixa de pressão de trabalho

3.4.6 - Calibração das placas de orifício

3.4.6.1 - Calibração estática

A calibração estática das placas consiste na determinação experimental da função transferência que relaciona Q com ΔP , além da determinação da curva de erro do sistema de medição. Como os sinais provenientes dos transdutores de pressão são sinais de tensão, torna-se necessária sua calibração prévia. A calibração dos transdutores foi realizada seguindo as normas indicadas em [42] e com a mesma unidade de tratamento de sinal a ser utilizada na calibração das placas. Isto permite a obtenção de um erro global único do sistema de medição. O laboratório de Metrologia (LABMETRO) da UFSC, foi utilizado para esta calibração.

Com a função transferência e a curva de erro global de cada transdutor, procedeu-se a calibração estática das placas utilizando-se o procedimento descrito na Sec. 3.1. Desta forma, para cada placa contida na Tab. 3.3, foi obtida a relação $Q_0 = f(\Delta P)$ e a curva de erro do sistema, seguindo as normas de calibração dadas por [42] e [43]. Esta função de transferência é da forma exponencial, ou seja

$$Q_0 = A_0 k (\Delta P)^b \quad (3.37)$$

Com a Eq. (3.37), os coeficientes de vazão para regime permanente podem ser determinados a partir da equação de Bernoulli, obtendo-se

$$C_q = \frac{Q_0}{A_0 \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}} = \frac{k (\Delta P)^b}{\sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}} \quad (3.38)$$

onde

C_q = coeficiente de vazão

Q_0 = vazão estática obtida da calibração das placas (m^3/s)

A_0 = área da seção do orifício da placa (m^2)

ΔP = queda de pressão estática na placa, obtido experimentalmente
(Pa)

ρ = massa específico do fluido

k = coeficiente global obtido da calibração da placa

b = constante obtida a partir da calibração da placa.

As curvas de calibração estática das placas cujas dimensões constam da Tab. 3.3 são dadas nas Figs. 3.14 a 3.18. As curvas de calibração dos transdutores não são apresentadas no presente trabalho por não serem relevantes. A temperatura de trabalho do óleo para a calibração das placas foi de $34,5^{\circ}C$.

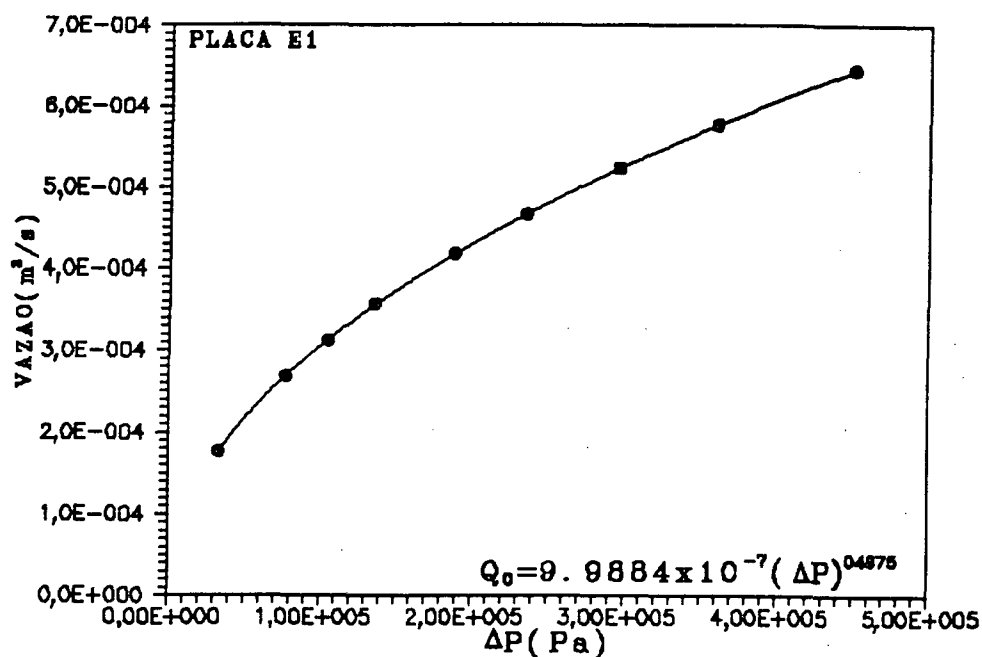


Fig. 3.14 - Curva de calibração da placa E1.

3.4.6.2 - Calibração dinâmica

A calibração dinâmica de um orifício ou qualquer outro componente hidráulico ou pneumático envolve a geração de uma vazão transiente padrão

conhecida. A geração de uma vazão transiente conhecida ou medida experimentalmente com precisão é uma tarefa difícil de ser realizada. Em sistemas hidráulicos, por exemplo, onde o conhecimento das características dinâmicas de servo-válvulas torna-se uma necessidade primordial, aproximações quase estáticas têm sido usadas extensivamente para descrever o comportamento transiente de alguns componentes, devido à dificuldade de geração de transientes conhecidos.

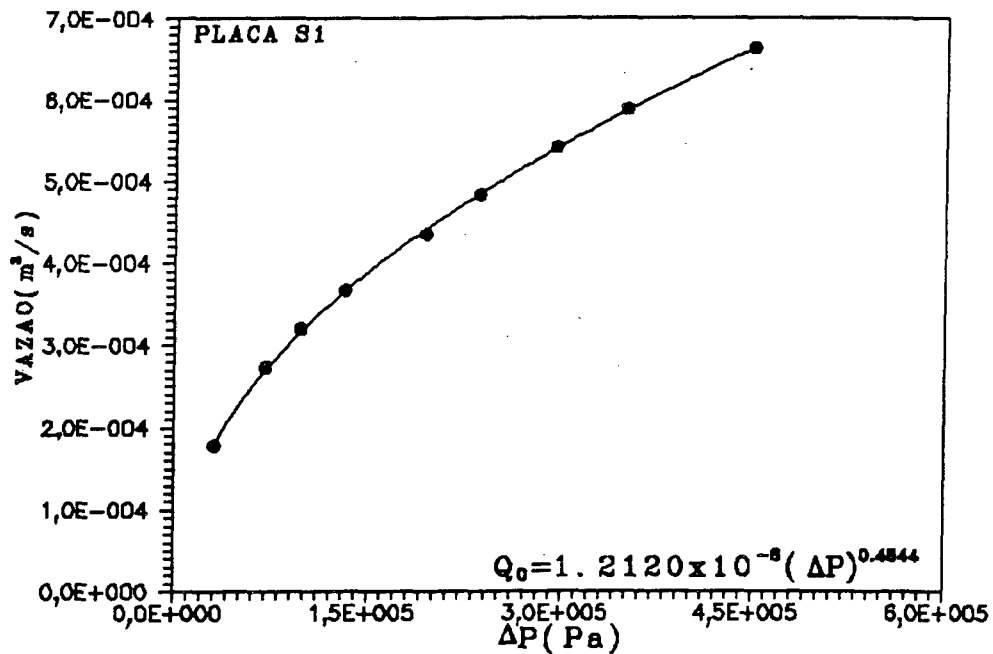


Fig. 3.15 - Curva de calibração da placa S1.

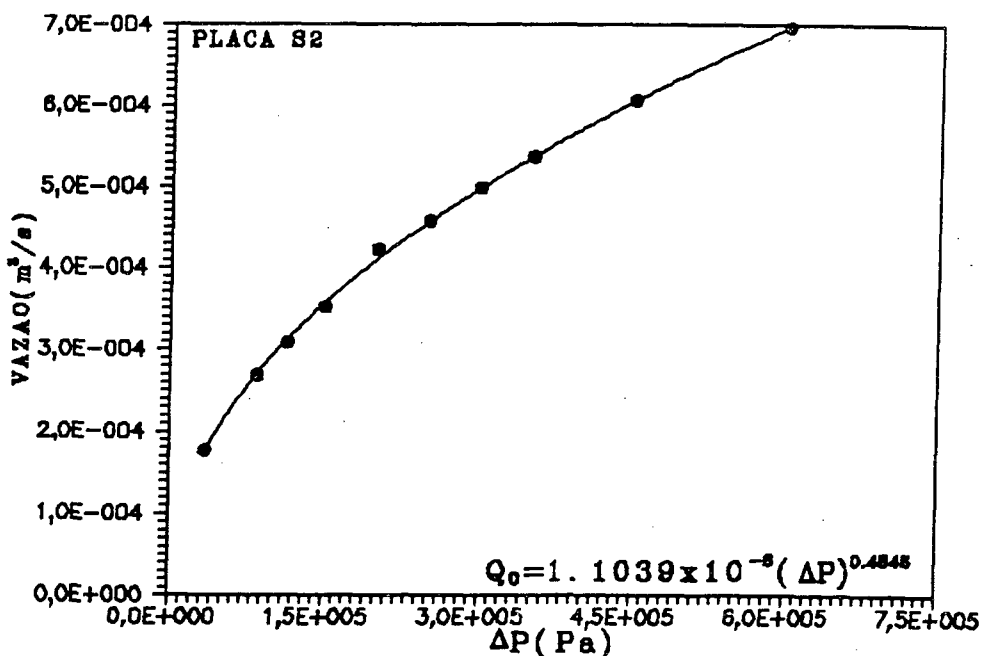


Fig. 3.16 - Curva de calibração da placa S2.

Vários trabalhos têm sido publicados por diferentes autores, referentes a escoamentos pulsantes, ressaltando o efeito da frequência no comportamento dos coeficientes de vazão. Em alguns destes trabalhos, no entanto, assume-se que orifícios e válvulas conservam as suas características de regime permanente durante operações transientes, para algumas condições.

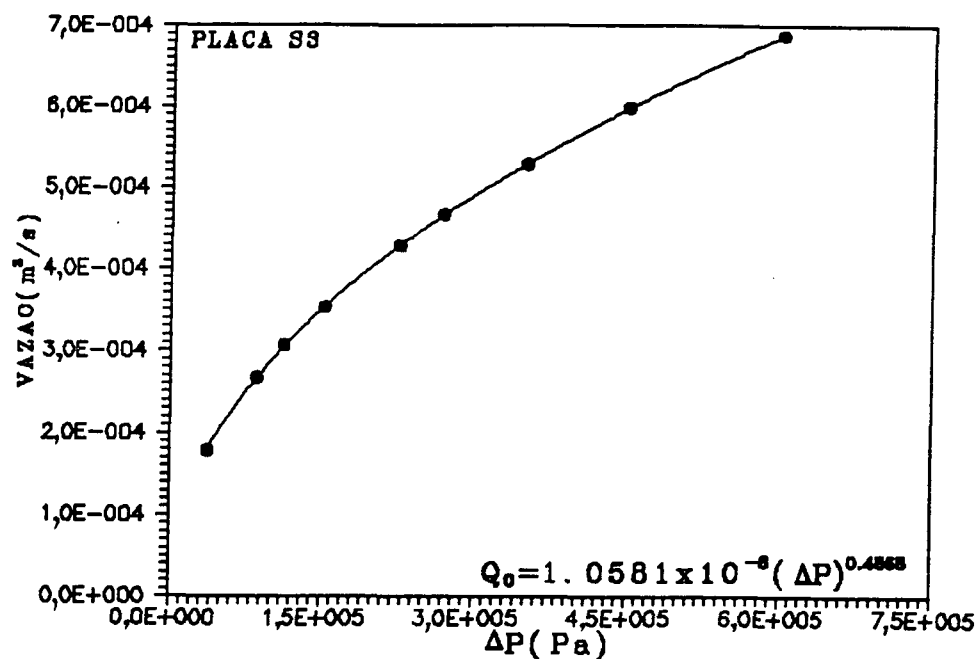


Fig. 3.17 - Curva de calibração da placa S3.

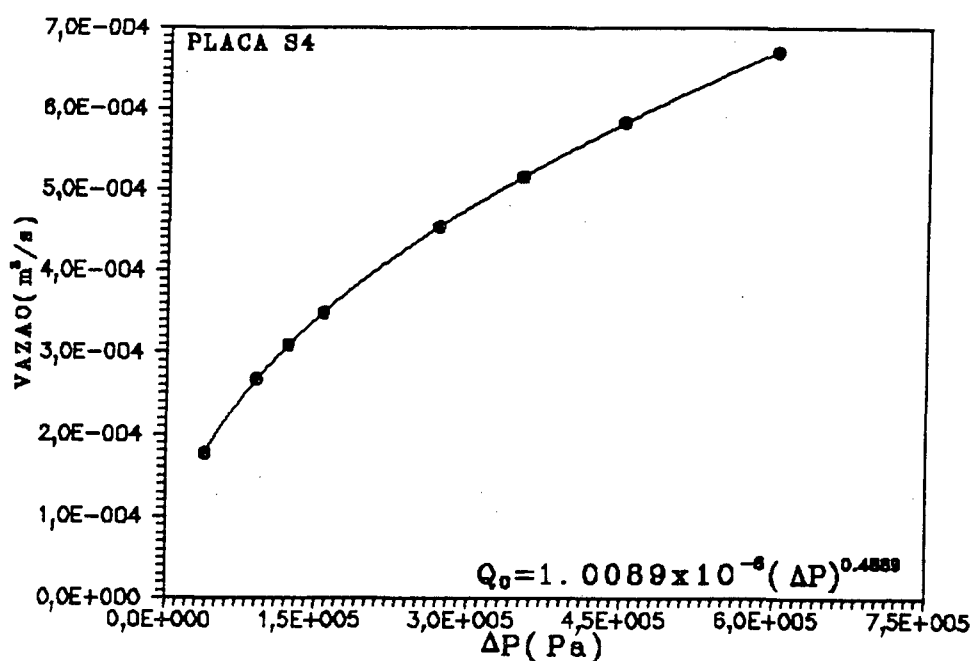


Fig. 3.18 - Curva de calibração da placa S4.

Outros autores enfatizam a necessidade de desenvolvimento de expressões que descrevam o comportamento transiente. Alpay [42], por exemplo, produziu resultados experimentais que mostraram os efeitos dinâmicos nos coeficientes de vazão de uma servo- válvula comercial. Ele concluiu que os coeficientes de vazão decrescem linearmente de 0,35% por Hz na faixa de 4 a 42 Hz. Por outro lado, McCloy [43], fazendo testes similares com uma servo- válvula do mesmo tipo que a usada por Alpay, encontrou que os coeficientes de vazão dinâmicos não variavam significativamente para frequências entre 0 e 30 Hz. Isto é, segundo McCloy, para frequências compreendidas nesta faixa, os coeficientes de vazão conservavam as suas características do regime permanente. Funk et al [44], concluíram no seu trabalho que em muitas situações práticas de engenharia, o uso de características de regime permanente para descrever o comportamento transiente de orifícios é aceitável, principalmente para transientes suaves. No entanto, afirmam Funk e colaboradores, em sistemas onde ocorrem transientes muito bruscos torna-se necessário considerar o comportamento dinâmico do orifício ou de outro componente hidráulico qualquer. Por último, Burrows et al [45], propõem um método indireto para medir um escoamento oscilatório numa servo- válvula. Neste caso, o número de variáveis envolvidas para o cálculo é tão grande que a precisão dos resultados fica afetada. Ele desenvolve um processo de medição de vazão que envolve a ligação da saída da servo- válvula com uma câmara de volume variável contendo um pistão movimentando-se num cilindro. Problemas de vazamento na folga pistão-cilindro e atrasos na propagação da onda de vazão até a câmara diferencial ocorreram neste caso.

Esta discussão mostra claramente que, mesmo quando se consideram os efeitos dinâmicos, as vazões transientes padrões utilizadas para a calibração dos sistemas provêm sempre de métodos indiretos que dependem de parâmetros de caráter não experimental, podendo acarretar erros. Daí, resultados contraditórios são encontrados na literatura.

No presente trabalho, embora a vazão da flutuação seja conhecida

na saída do gerador, devido à compressibilidade do óleo e estrutura não é seguro usar estes dados como exatos, uma vez que um amortecimento e um atraso da flutuação ocorre no percurso até a placa, fazendo com que a vazão na mesma seja levemente distorcida com relação ao volume instantâneo deslocado pelo pistão do gerador, tal como mencionado no Cap. 2 . No presente trabalho, dois são os processos utilizados para a obtenção da vazão instantânea na placa . O primeiro, obtido a partir dos gradientes de pressão medidos experimentalmente na placa, considera que, para as frequências utilizadas, os coeficientes de vazão dinâmicos conservam as suas características de regime permanente, dentro da concepção estabelecida por McCloy [43]. O segundo procedimento, denominado de analítico, considera a vazão na placa como sendo a vazão instantânea deslocada pelo pistão do gerador de flutuações, corrigida em módulo e fase . Neste último caso, o qual é descrito detalhadamente no Cap. 4, um modelo analítico é desenvolvido para a obtenção do módulo e da fase da onda de vazão na placa.

No procedimento experimental de obtenção da vazão instantânea na placa, a consideração de que os coeficientes de vazão transientes conservam as suas características do regime permanente para um determinado $\Delta P(t)$ baseia-se em 3 razões principais.

Em primeiro lugar, as frequências utilizadas são pequenas (2 a 10 Hz), encontrando-se dentro da faixa estabelecida por McCloy [43], na qual a influência da dinâmica do escoamento é ainda pequena.

Em segundo lugar, o transdutor de pressão diferencial utilizado garante excelentes características dinâmicas de medição, podendo ser utilizado para medir frequências até de 4 kHz. Desta forma, para a faixa de frequências utilizada, o transdutor de pressão garante as respostas dinâmicas de pressão na placa.

Por último, as flutuações de vazão criadas no gerador de pulsos de vazão são de amplitude pequena, cobrindo uma faixa restrita de número de Reynolds em torno de um valor médio correspondente à vazão média Q_0 . Desta

forma, os coeficientes em regime permanente, para esta faixa de vazões, apresentam o mesmo comportamento e os coeficientes médios no tempo são os próprios coeficientes correspondentes à vazão média Q_0 .

A consideração de que os coeficientes de vazão dinâmicos conservam as características dos coeficientes em regime permanente, para esta faixa de frequências, permite relacionar a vazão dinâmica, $Q_t(t)$, com os gradientes de pressão dinâmicos, $\Delta P(t)$, da mesma forma que no regime permanente.

$$Q_t(t) = A_0 k [\Delta P(t)]^b \quad (3.39)$$

onde k e b são as constantes obtidas da calibração da placa no regime permanente para a faixa de vazões correspondente à flutuação.

Garantindo que todos estes parâmetros sejam determinados com precisão, os coeficientes dinâmicos de vazão, $Cq(t)$, são determinados, de maneira similar ao regime permanente, como

$$Cq(t) = \frac{Q_t(t)}{A_0 \sqrt{\frac{2\Delta P(t)}{\rho}}} = \frac{k [\Delta P(t)]^b}{\sqrt{\frac{2\Delta P(t)}{\rho}}} \quad (3.40)$$

3.4.6.3 - Cálculo dos erros de medição

a) Erros estáticos:

Toda medida é afetada por um erro. Este erro é provocado pelo sistema de medição e operador (LABMETRO [46] e [47]). Para expressar propriamente o valor da grandeza a medir é necessário obter um resultado da medição. Este resultado da medição (RM) é constituído pelo valor da medida (VM) acompanhado da incerteza de medição (IM) e da unidade da grandeza a medir.

$$RM = VM \pm IM \quad (3.41)$$

A incerteza de medição, (IM), expressa o maior erro que o sistema de medição poderá impor à medida ao longo de sua faixa de operação.

A dispersão da medição (DM) especifica a faixa de valores dentro da qual, com uma probabilidade estatística definida, se situa o erro aleatório de uma medição. Normalmente, especifica-se a DM de modo a abranger 95% dos erros aleatórios, isto é

$$DM(p) = \pm t.S \quad (3.42)$$

onde

p = probabilidade de enquadramento;

t = coeficiente de Student ;

S = desvio padrão calculado com n medidas

$$S = \sqrt{\frac{\sum (M_i - M)^2}{n - 1}} \quad (3.43)$$

Eliminando-se a possibilidade de existência de erros grosseiros, pode-se agora expressar a incerteza de medição (IM), na faixa de operação, como sendo

$$IM = \pm |Es + DM(p)|_{\max} \quad (3.44)$$

onde Es representa o erro sistemático do sistema de medição.

Como a grandeza física ΔP , para o caso dos transdutores de pressão absoluta, é calculada a partir de P_u e P_d , determinados experimentalmente ($\Delta P = P_u - P_d$), surge neste caso, uma combinação de erros que deverá ser calculada, a partir das incertezas das grandezas P_u e P_d , ou seja

$$\Delta P = f(P_u, P_d) \quad (3.45)$$

$$P_i = RBP_i \pm IRP_i \quad (3.46)$$

sendo

RBP_i = resultado base da medição da grandeza física P_i ;

IRP_i = incerteza de medição do resultado da medição da grandeza física P_i .

Estando as n grandezas físicas, P_i , afetadas de incertezas de medição o problema consiste em saber de qual incerteza estará afetado o valor atribuído à grandeza $\Delta P(IR\Delta P)$.

A incerteza de $\Delta P(IR\Delta P)$ devida à incerteza de $P_i(IRP_i)$ é dada em valor absoluto como sendo (LABMETRO [46] e [47])

$$\left[IR\Delta P \right]_{P_i} = \left\| \frac{\partial \Delta P}{\partial P_i} \right\| \cdot IRP_i \quad (3.47)$$

e a incerteza relativa dada por

$$\frac{(\pm R\Delta P) P_i}{\Delta P} = \left\| \frac{\partial P}{\partial P_i} \right\| \cdot \frac{RBP_i}{\Delta P} \cdot \frac{IRP_i}{RBP_i} \quad (3.48)$$

A incerteza relativa máxima provável é dada pela média quadrática da soma dos fatores (LABMETRO [42]).

$$\left[\frac{IR\Delta P}{\Delta P} \right]_{\max. \text{ prov.}} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^n \left[\frac{(IR\Delta P)_{P_i}}{\Delta P} \right]^2} \quad (3.49)$$

No cálculo da vazão através da expressão do tipo $Q = A_0 k(\Delta P)^b$, uma outra combinação de erros aparece tanto para o ΔP obtido a partir de P_u e P_d , como para o ΔP obtido diretamente pelo transdutor diferencial. Esta combinação de erro deverá também ser incluída na obtenção da curva de erro do sistema de medição de vazão estática e dinâmica. Para evitar uma propagação de erros, as mesmas unidades de tratamento de sinal e indicador empregadas na calibração foram utilizados nas medições. Desta forma, obtém-se um erro global que descreve o comportamento metrológico do sistema.

As curvas de erro global obtidas a partir da calibração dos transdutores são mostradas na Fig. 3.19. Observa-se que para os transdutores de pressão absoluta, a DM existe apenas numa faixa de pressão (Fig. 3.19-a e b), enquanto que para o transdutor de pressão diferencial a DM existe para toda a faixa de operação (Fig. 3.19-c).

Para o cálculo da DM do sistema de medição de vazão estática, 3 medidas foram realizadas em condições idênticas. Como neste caso não se tem um valor verdadeiro convencional (VVC), o erro sistemático não pode ser calculado da maneira descrita anteriormente. Considera-se aqui como erro sistemático um erro máximo de leitura correspondente à metade do incremento de escala. Assim, como o incremento de escala é 0,1ℓ, considera-se um erro sistemático constante máximo de 0,05ℓ em cada leitura. Desta forma, a incerteza de medição do sistema de medição de vazão estático será dada por

$$IM = \pm \left[Es + DM + EAP \right]_{\max}. \quad (3.50)$$

onde EAP corresponde à parcela do erro de calibração dos transdutores mais a propagação e combinação de erros, quando existentes. A variação do erro máximo percentual com a vazão, obtido a partir da calibração estática das placas de orifício com o transdutor diferencial é mostrado, para algumas das placas da Tab. 3.3, na Fig. 3.20.

b) Erros dinâmicos

Ao medir uma magnitude que varia em função do tempo, os resultados da medição podem ser alterados não somente pelos erros acima mencionados (erros estáticos), mas também por um novo tipo de erro, o qual somente aparece num regime dinâmico (erro dinâmico). Erro dinâmico de um sistema de medição é a diferença entre o erro do sistema em regime dinâmico e seu erro estático correspondente ao valor da magnitude num dado instante de tempo, supondo que

não existam erros grosseiros. Se a magnitude de entrada é expressa pela função $X(t)$ e a magnitude de saída pela função $Y(t)$, então a cada instante, o erro dinâmico absoluto, sem incluir o erro estático, será

$$\Delta e(t) = Y(t) - Y_p(t) \quad (3.51)$$

onde $Y_p(t)$ é a magnitude de um sistema padrão.

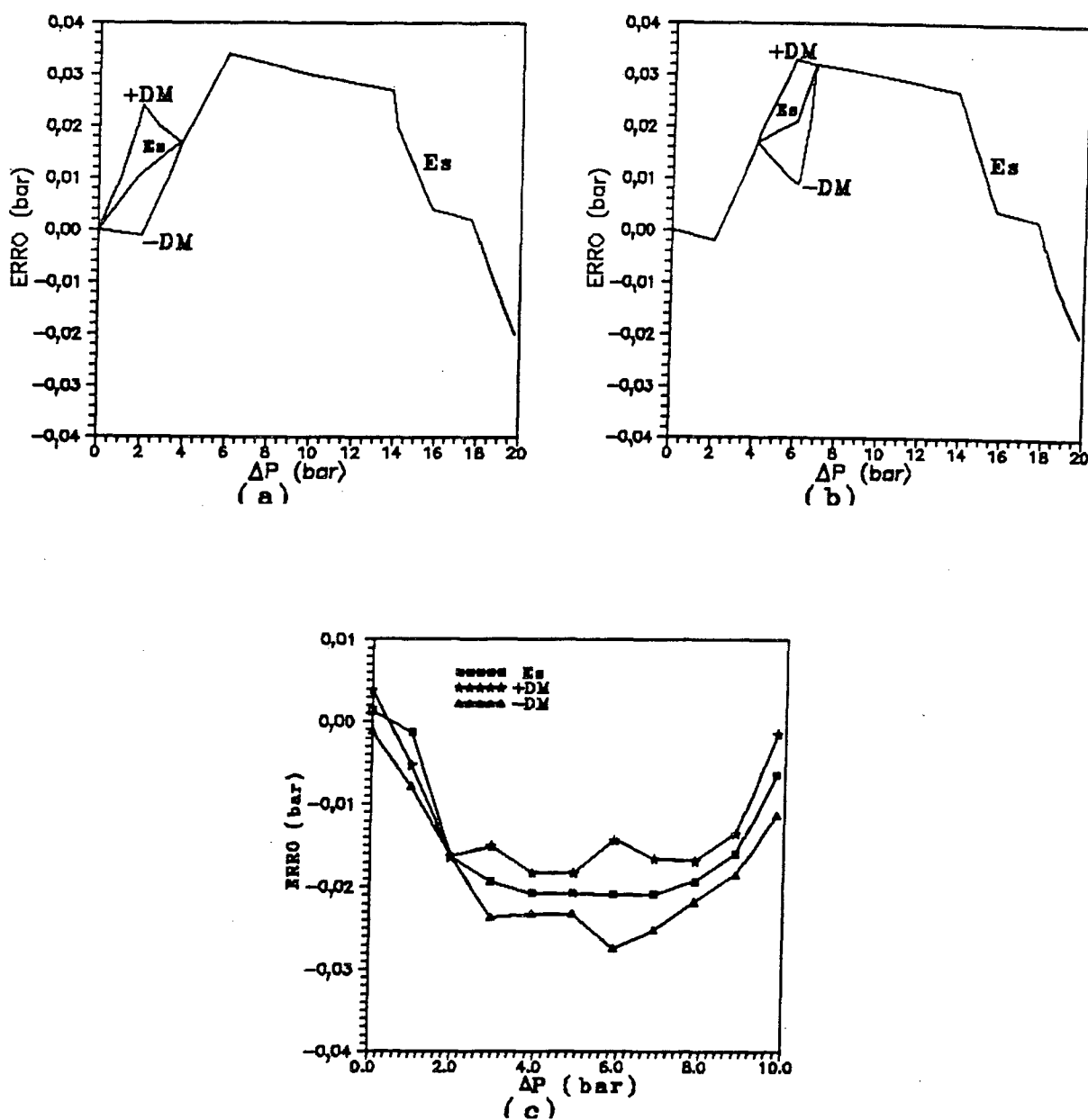


Fig. 3.19 - Curvas de erro estático dos transdutores de pressão.

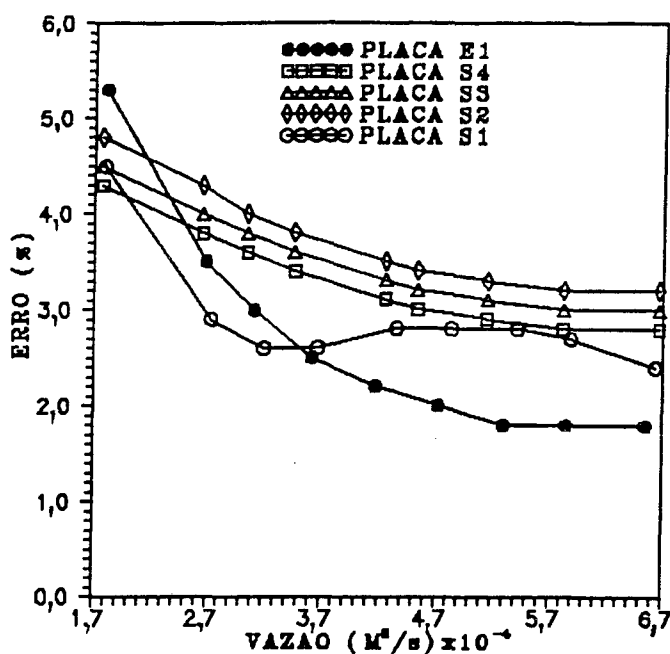


Fig. 3.20 - Erro percentual das placas E1, S1, S2, S3 e S4

No presente trabalho, estes erros dinâmicos não foram computados por não se dispor de padrões dinâmicos para a calibração. No entanto, acredita-se que estes erros foram pequenos na medida em que, para a obtenção das grandezas dinâmicas, transdutores com uma frequência natural bem acima da faixa de frequências de trabalho foram usados.

3.4.6.4 - Obtenção experimental da razão de amplitude e da fase entre os sinais

O sistema projetado no presente trabalho é um sistema dinâmico, com função estímulo senoidal de amplitude A_x e frequência constante, f . Neste caso, a resposta do sistema será também senoidal de amplitude A_y e mesma frequência, Coughanowr [48] e Ogata [49].

A Fig. 3.21 mostra, apenas como exemplo, o amortecimento e o atraso no tempo do sinal de saída do sistema, para uma das frequências de trabalho. O módulo e a fase transitória do sinal de saída dependem das características dinâmicas dos aparelhos de medição, da frequência das oscilações e das características do sistema.

Experimentalmente, para uma dada frequência w_k , a fase $\phi(w_k)$ entre os dois sinais é dado por

$$\phi(w_k) = -w_k \Delta t = -2\pi f_k \Delta t \quad (3.52)$$

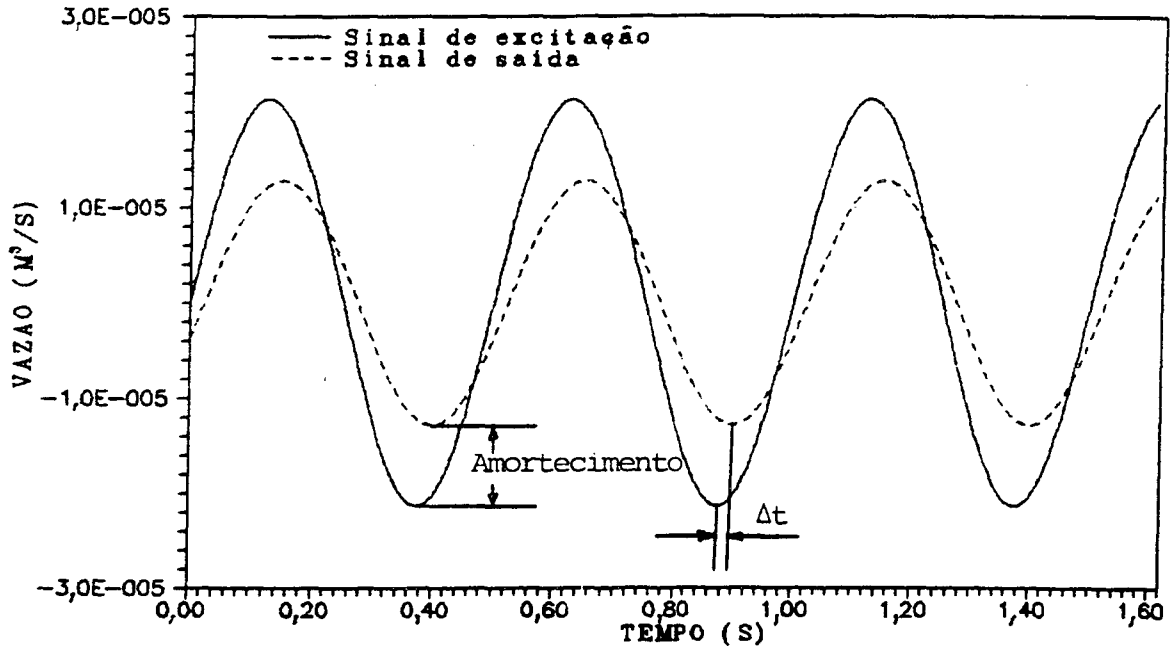


Fig. 3.21 - Módulo e fase dos sinais de excitação e saída com frequência cíclica constante.

Sabe-se, do mecanismo gerador de pulsos de vazão, que a velocidade máxima do pistão ocorre no instante em que ele se encontra na posição correspondente à metade do seu curso. Neste instante, a flutuação de vazão ou pressão na saída do gerador de pulsos (sinal de excitação), também deverá ser máxima (ou mínima, dependendo do sentido da velocidade). Ao mesmo tempo, a flutuação de vazão ou pressão amortecida na placa (sinal de saída), deverá também corresponder a um máximo ou mínimo, dependendo do sentido da velocidade, se não houver nenhuma defasagem na aquisição do sinal. Como, de fato, esta defasagem ocorre na aquisição dinâmica de sinais, os valores de t correspondentes aos máximos do sinal de excitação são diferentes dos correspondentes ao sinal de saída, tal como mostrada na Fig. 3.21.

Tomando-se em conta estas considerações, a defasagem θ , entre os sinais, foi obtida experimentalmente utilizando-se um fototransistor instalado no eixo do gerador de pulsos. Este dispositivo fornece um pico de tensão no instante em que o pistão passa pela metade do seu curso, ou seja no instante em que a velocidade atinge o seu valor máximo. Desta forma, é possível comparar o instante em que ocorre o máximo de vazão no pistão do gerador (sinal de excitação), com o instante em que ocorre o máximo de $\Delta P(t)$ indicado pelos transdutores de pressão (sinal de saída). A Fig. 3.22, ilustra esta situação para uma das frequências de trabalho. Aqui a senoide representa o sinal de pressão (sinal de saída), fornecido pelos transdutores, e a linha cheia indica os picos de tensão, fornecidos pelo fototransistor nos instantes em que o pistão atinge a sua velocidade máxima. O Δt é obtido pela diferença entre o instante do pico de tensão e o instante em que ocorre o máximo na senoide de $\Delta P(t)$. Desta forma, a fase, θ , é obtido pela Eq.3.52

Se $Y(t)$ representa o sinal de saída e $X(t)$ o sinal de entrada do sistema, a razão de amplitude entre os sinais é determinada experimentalmente por

$$R_a(t) = \left[\frac{\text{amplitude de } Y(t)}{\text{amplitude de } X(t)} \right] \quad (3.53)$$

A determinação experimental das características módulo-fase permite que se obtenha o comportamento dinâmico do pulso de vazão no percurso entre o gerador de flutuações e a placa de orifício para a faixa de frequências e vazões utilizadas. Estes valores do módulo e da fase, obtidos experimentalmente, são comparados com os obtidos do modelo analítico, descrito com detalhes no Cap. 4.

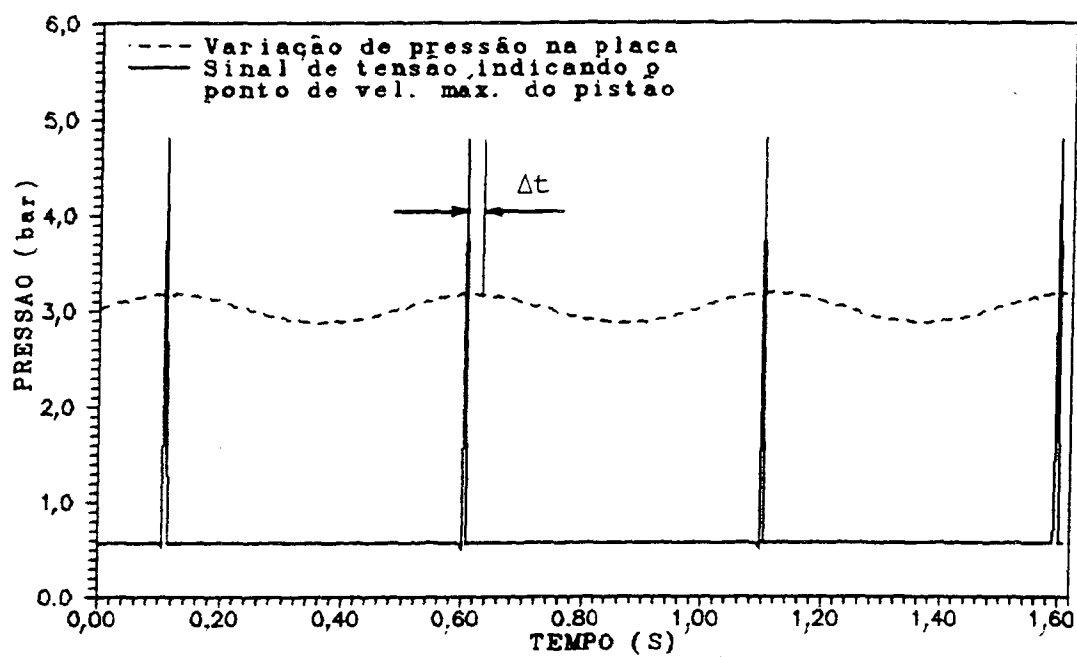


Fig. 3.22 - Processo de determinação do tempo de defasagem entre o sinal de excitação e saída

4 - MODELO ANALÍTICO

4.1 - INTRODUÇÃO

Ao longo da sua propagação, as ondas sofrem uma série de transformações, sendo amortecidas e defasadas devido a perdas de energia ocorridas ao longo do percurso (singularidades, viscosidade do meio, superfície livre, etc.). Estas características dissipativas das ondas dificultam o estudo teórico ou experimental de escoamentos pulsantes. Desta forma, um modelo analítico capaz de prever o comportamento dinâmico de uma perturbação torna-se de grande importância em todas as situações que envolvam escoamentos pulsantes. Este modelo, associado ao modelo numérico transiente constituem a metodologia analítica proposta.

O sistema Fluido-dinâmico, como mostrado na Fig. 4.2.a, pode ser modelado matematicamente fazendo-se um balanço de massa e da quantidade de movimento no volume de controle, o qual pode envolver uma análise diferencial ou integral. A análise diferencial leva às equações de Navier Stokes, as quais são resolvidas numericamente no presente trabalho, sendo apresentadas com detalhes no Cap. 5.

Com a finalidade de se obterem equações mais simples, que possam ser resolvidas analiticamente e que permitam uma síntese do comportamento dinâmico do sistema, propõe-se, nesta seção, uma análise global das forças que atuam no sistema, cujas magnitudes podem ser obtidas a partir de propriedades médias do escoamento.

A Fig. 4.1 mostra o modelo de um sistema de massa distribuída, discretizado em N posições do domínio. Este sistema constitui um oscilador mecânico amortecido, excitado por uma fonte externa de deslocamento, onde k_i representa as constantes das molas e c_i representa os amortecimentos para cada massa distribuída do sistema. Desta maneira, chega-se a um modelo de massas concentradas com N graus de liberdade [66].

Neste sistema, $F(t)$ representa uma fonte de força enquanto que $\delta(t)$ representa uma fonte de deslocamento. No caso de existir somente uma fonte de força, chega-se a um modelo com N equações diferenciais de segunda ordem. No caso de existir somente uma fonte de deslocamento, chega-se a um conjunto de $N-1$ equações diferenciais de segunda ordem, já que o movimento da primeira massa fica pré-estabelecido pelo deslocamento prescrito pela fonte [66]. A massa m_2 representa a massa à jusante da última posição N , a qual contribui também com o amortecimento da flutuação, devido às características do sistema. Note que a inclusão desta massa no sistema, para detectar efeitos à montante da posição N , é possível por se considerar o sistema linear.

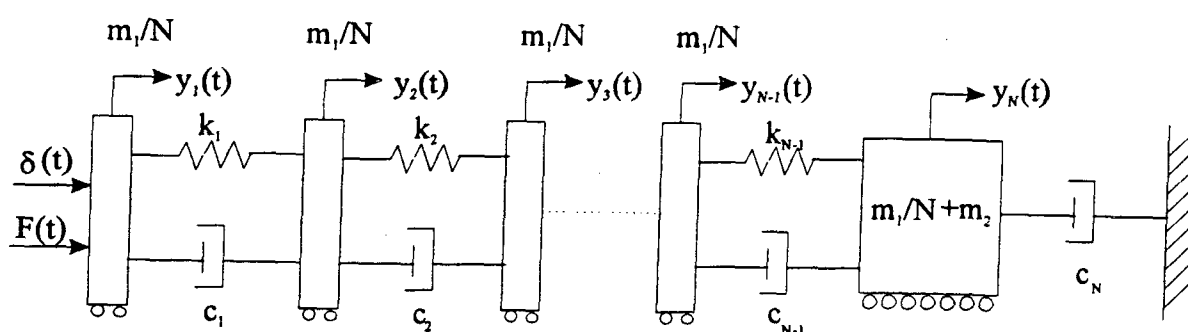


Fig. 4.1 - Modelo discretizado de um sistema de massa distribuída

Como no sistema fluido-dinâmico em estudo, as ondas se propagam de forma alternada e repetitiva, tendo um caráter oscilatório com constantes de tempo características (ver Fig. 4.2.a), nada melhor para se compreender a

problemática deste escoamento transitório, do que compará-lo com um sistema mecânico amortecido, tal como o mostrado na Fig. 4.1. O sistema fluido-dinâmico pode ser modelado, neste caso, como sendo um sistema linear de massas concentradas, excitado por uma fonte de deslocamento (pistão) e tendo como sinal de interesse (saída) o deslocamento de massa no orifício da placa.

A Fig. 4.2.a mostra o volume de controle do oscilador e o percurso a ser percorrido pela flutuação de vazão. Conhecido o deslocamento instantâneo do pistão, $x(t)$, e considerando-se $y(t)$ o deslocamento instantâneo do fluido a uma distância L_e do pistão, imediatamente a montante da placa, o objetivo deste modelo é obter uma relação da forma $\dot{y}(t) = Ra \dot{x}(t-\tau)$, onde Ra representa a razão entre as amplitudes das velocidades e τ o atraso devido aos efeitos do próprio amortecimento. A velocidade $\dot{y}(t)$ obtida a partir deste modelo, permite a obtenção da vazão instantânea, $Q_t(t)$, a qual servirá de condição de contorno para o modelo numérico. A validação física deste modelo será realizada, comparando-se as vazões instantâneas obtidas com esta metodologia, com os valores instantâneos de vazão obtidos através do sistema de medição de vazão do tipo placa de orifício, descrito na metodologia experimental.

Como mencionado anteriormente, este sistema fluido-dinâmico pode ser modelado comparando-o com o sistema mecânico amortecido, como o mostrado na Fig. 4.1. Neste caso, a fonte de excitação é o deslocamento do pistão, e a primeira massa, mais a esquerda, representa a parcela de fluido em contato com o pistão. Portanto seguirá fielmente o movimento do pistão. Já a última massa mais a direita, representa a parte do fluido imediatamente à montante do orifício. Note que o aumento do número de massas distribuídas leva a uma aproximação da solução exata do problema, podendo captar a presença de frequências mais altas de oscilação. Em contrapartida, um sistema de equações muito grande deverá ser resolvido.

Para o caso do sistema em estudo, devido à distância L_e ser relativamente curta e para simplificar o problema, apenas duas massas

concentradas ($N=2$) serão consideradas, além da massa à jusante do orifício (m_2), que também contribui no amortecimento da flutuação.

A Fig. 4.2.b representa esquematicamente o sistema mecânico equivalente, com apenas duas massas concentradas, onde o sinal de excitação é dado pelo deslocamento do pistão, $x(t)$, e o sinal de saída é dado pelo deslocamento $y(t)$ da massa imediatamente à montante do orifício da placa. Como trata-se de um sistema com fonte de deslocamento, a massa à esquerda, ou seja, a massa adjacente à fonte de deslocamento, tem o seu movimento prescrito pelo deslocamento $x(t)$, motivo pelo qual não é necessária a sua explicitação na figura. Neste caso, como $N=2$, apenas uma equação diferencial ordinária de segunda ordem deverá ser obtida no domínio do tempo. Desta forma, a solução do problema será obtida resolvendo-se apenas uma equação diferencial ordinária, simplificando enormemente o método de solução.

Na Fig. 4.2.b, a mola representa a compressibilidade do sistema, a qual é caracterizada pelo coeficiente de compressibilidade β . Por outro lado, os coeficientes c_i representam os amortecedores da flutuação devido às diferentes forças que atuam no sistema. Desta forma, c_1 representa o amortecimento da flutuação devido ao atrito viscoso e devido à variação da quantidade de movimento entre a vazão média Q_0 e a flutuação, à montante da placa, c_2 é o amortecimento devido ao atrito viscoso à jusante da placa, c_3 é o amortecimento devido à dissipação no orifício e c_4 corresponde ao amortecimento devido à dissipação nas reduções de diâmetros à jusante da placa. Aqui, m_2 representa a massa deslocada à jusante da placa.

Note que, pela linearidade do sistema, os efeitos de pressão devidos a Q_0 e à flutuação de pressão criada pelo deslocamento do pistão (pulso), podem ser considerados separadamente e serem superpostos à posteriori, se desejado. Observe que Q_0 representa, neste sistema, uma fonte de força constante que entra apenas para elevar o nível de pressão do sistema.

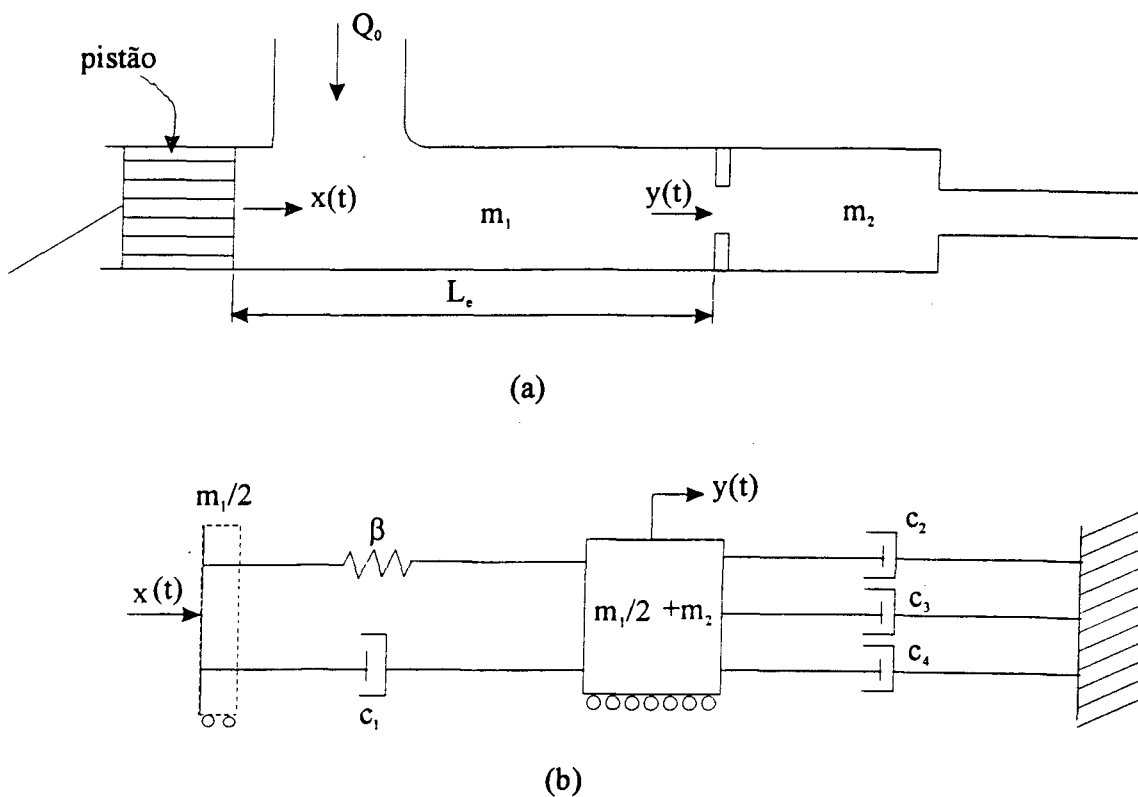


Fig. 4.2 - Volume de controle do sistema oscilatório
e sistema mecânico equivalente

4.2 - DESENVOLVIMENTO DO MODELO

Fazendo-se uma analogia com o sistema mecânico da Fig. 4.2.b, o balanço global das forças que atuam na cavidade da Fig. 4.2.a fornece

$$F_{\beta}(t) + F_c(t) + F_{Q_0}(t) + F_0(t) + F_M(t) + F_i(t) = 0 \quad (4.1)$$

onde

$F_{\beta}(t)$ = força devida à compressibilidade do fluido

$F_c(t)$ = força devida ao amortecimento viscoso

$F_{Q_0}(t)$ = força devida à variação da quantidade movimento imposta por Q_0

$F_0(t)$ = força devida à resistência hidráulica do orifício

$F_M(t)$ = força devida à resistência hidráulica das mangueiras a jusante da placa.

$F_I(t)$ = força de inércia da massa deslocada

Cada uma destas forças é determinada utilizando-se propriedades médias do escoamento, como segue

A força devida à compressibilidade do fluido pode ser obtida a partir da definição do coeficiente de compressibilidade isotérmico, β . Por definição,

$$\beta = \left. \frac{\partial P}{\partial V} \right|_T V_0 \quad (4.2)$$

Para um processo de compressão linear, pode-se escrever

$$\beta = - \left. \frac{\Delta P}{\Delta V} \right|_T V_0 \quad (4.3)$$

A variação total de volume devida à compressão pode ser dada por

$$\Delta V = \left[A_D y(t) - A_C x(t) \right] \quad (4.4)$$

de onde

$$\Delta P = - \frac{\beta}{V_0} A_C \left[\frac{A_D}{A_C} y(t) - x(t) \right] \quad (4.5)$$

Desta forma, a força devida à compressibilidade do fluido pode ser dada por

$$F_\beta(t) = - \frac{\beta A_C^2}{V_0} \left[\frac{A_D}{A_C} y(t) - x(t) \right] \quad (4.6)$$

onde

A_D = área da seção transversal do duto (m^2)

A_C = área da seção transversal do cilindro (m^2)

V_0 = volume da cavidade de comprimento L_e (m^3)

ΔP = variação de pressão na cavidade (Pa)

$x(t)$ = deslocamento instantâneo do pistão (m)

$y(t)$ = deslocamento instantâneo da massa a uma distância L_e do gerador de pulsos (m)

A força amortecedora devida ao atrito viscoso nas paredes do duto pode ser determinada através da tensão viscosa na parede para escoamento laminar.

$$F_c(t) = \rho f \frac{\pi L D}{8} \dot{y}(t)^2 \quad (4.7)$$

Aquí L é o comprimento total do duto e das mangueiras, até o tanque de armazenamento de óleo, D é o diâmetro envolvido, ρ é a massa específica e f , o fator de atrito, dado por

$$f = \frac{64 \mu}{\rho D \dot{y}(t)} \quad (4.8)$$

de onde

$$F_c(t) = 8 \mu \pi L \dot{y}(t) \quad (4.9)$$

Assim, a força amortecedora resultante devido à variação da velocidade é dada por

$$F_c(t) = 8 \mu \pi L \left[\dot{y}(t) - \dot{x}(t) \right] \quad (4.10)$$

Note que quando $\dot{x}(t) = \dot{y}(t)$, a força devido ao atrito viscoso na parede é nula, significando que as duas velocidades correspondem a valores impostos pelo deslocamento do pistão ao sistema.

A força devida à variação da quantidade de movimento entre a vazão média Q_0 e a flutuação de vazão, gerada pelo deslocamento do pistão, pode ser determinada através de um balanço local das forças atuantes, obtendo-se

$$F_{0_0}(t) = Q_0 p \left[\dot{y}(t) - \dot{x}(t) \right] \quad (4.11)$$

A força devido à resistência hidráulica do orifício está associada à queda de pressão, resultante da inércia do fluido devido à redução do diâmetro no orifício.

A vazão volumétrica que atravessa o orifício de raio R , no regime permanente, é dada por

$$Q = \int_A V \, dA = \int_0^R \tilde{u} \, 2 \pi r \, dr \quad (4.12)$$

Podendo-se obter uma vazão média, dada por

$$Q = - \leftarrow \frac{\pi R^4}{8 \mu} \left[\frac{\partial P}{\partial x} \right] = \frac{\pi d^4}{128 \mu L_0} \Delta P \quad (4.13)$$

Como as propriedades do fluido e os parâmetros geométricos do orifício são constantes no tempo, a Eq. (4.13) pode ser escrita para vazões dinâmicas.

$$Q(t) = \leftarrow \frac{\pi d^4}{128 \mu L_0} \Delta P(t) \quad (4.14)$$

Aqui d representa o diâmetro do orifício e L_0 o comprimento, enquanto que $Q(t)$ e $\Delta P(t)$ são as vazões e quedas de pressão dinâmicas do pulso, respectivamente.

A equação (4.14) pode ser escrita de uma forma mais conveniente

$$\Delta P(t) = \leftarrow \frac{128 \mu L_0}{\pi d^4} Q(t) \quad (4.15)$$

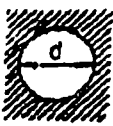

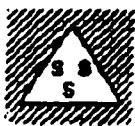
onde $\Delta P(t)$ é a variação dinâmica da pressão através do orifício e o termo $128 \mu L_0 / \pi d^4$ representa a resistência hidráulica do orifício e depende basicamente da viscosidade do fluido e dos parâmetros geométricos do orifício.

Desta forma, a força devida à resistência hidráulica do orifício de seção circular é dada por

$$F_0(t) = \leftarrow \frac{8 \mu \pi L_0 D^4}{d^4} \dot{y}(t) \quad (4.16)$$

Esta força é inversamente proporcional à relação de diâmetros elevada à quarta potência e diretamente proporcional à viscosidade do fluido e ao comprimento do orifício.

Para geometrias diferentes de orifícios, mesmo tendo a mesma área transversal, as resistências hidráulicas obtidas são diferentes sempre que a área molhada for diferente. Comparando 3 geometrias diferentes, como as mostradas na Tab. 4.1, Tsung [24], mostrou que a resistência hidráulica é menor no furo de seção circular e maior no furo de seção triangular. A causa disto é o fato do perímetro molhado ser diferente nos 2 casos. Este perímetro molhado é menor no orifício de seção circular, com a mesma área transversal, e maior no orifício de seção triangular.

Geometria dos Orifícios			
Resistências Hidráulicas	$\frac{128 \mu l}{\pi d^4}$	$\frac{28,4 \mu l}{w^4}$	$\frac{185 \mu l}{s^4}$
Relação dos valores	1	1,13	1,38

Tab. 4.1 - Resistência hidráulica de orifícios e fendas de mesma área transversal [24].

Desta forma, o orifício de seção circular oferece menor resistência ao escoamento, quando comparado com as outras geometrias,

produzindo menores quedas de pressão na placa. No presente trabalho apenas os orifícios de seção circular são analisados.

De maneira similar, a força devido à resistência hidráulica causada pela redução de diâmetro das mangueiras utilizadas a jusante da placa, pode ser associada à perda de carga resultante da inércia do fluido. Desta forma, obtém-se

$$F_M(t) = \frac{8 \mu \pi L_M D^4}{d_M^4} \dot{y}(t) \quad (4.17)$$

onde L_M e d_M são o comprimento e o diâmetro interno da mangueira utilizada a jusante da placa, respectivamente.

Finalmente, a força de inércia é dada por

$$F_i(t) = M \ddot{y}(t) \quad (4.18)$$

Desta forma, a equação da quantidade de movimento para o sistema fica

$$M \ddot{y}(t) + (8\mu\pi L + \frac{8\mu\pi L_0 D^4}{d^4} + \frac{8\mu\pi L_M D^4}{d^4} + \rho Q_0) \dot{y}(t) + \frac{\beta A_D A_C}{V_0} y(t) = \frac{\beta A_C^2}{V_0} x(t) + (8\mu\pi L + \rho Q_0) \dot{x}(t) \quad (4.19)$$

Dividindo toda a equação por $\frac{\beta A_D A_C}{V_0}$ e definindo

$$\tau^2 = \frac{\rho V_m V_0}{\beta A_D A_C} \quad (4.20)$$

$$\varepsilon = \frac{[8\mu\pi(L + L_0 D^4/d^4 + L_M D^4/d_M^4) + \rho Q_0] V_0}{2 \tau \beta A_D A_C} \quad (4.21)$$

obtém-se a equação

$$\tau^2 \ddot{y}(t) + 2\tau\epsilon \dot{y}(t) + y(t) = \frac{A_c}{A_D} x(t) + \left[2\tau\epsilon - \frac{8\mu\pi V_0 D^4}{\beta A_D A_c} \left(\frac{L_0}{d^4} + \frac{L_M}{d_M^4} \right) \right] \dot{x}(t) \quad (4.22)$$

onde

V_m = volume da massa deslocada (m^3)

τ = constante de tempo (s)

ϵ = razão de amortecimento viscoso

Aqui V_m representa o volume de massa deslocado, incluindo todas as tubulações e mangueiras. Por outro lado, τ representa uma medida da velocidade de resposta, enquanto que ϵ representa uma medida do grau de amortecimento ou do caráter oscilatório do sistema.

Fazendo-se ainda

$$X(t) = \frac{A_c}{A_D} x(t) + \left[2\tau\epsilon - \frac{8\mu\pi V_0 D^4}{\beta A_D A_c} \left(\frac{L_0}{d^4} + \frac{L_M}{d_M^4} \right) \right] \dot{x}(t) \quad (4.23)$$

obtém-se finalmente

$$\tau^2 \ddot{y}(t) + 2\tau\epsilon \dot{y}(t) + y(t) = X(t) \quad (4.24)$$

como

$$x(t) = r (1 - \cos \omega t) \quad (4.25)$$

$$\dot{x}(t) = r\omega \sin \omega t \quad (4.26)$$

$$X(t) = \frac{A_c}{A_D} r (1 - \cos \omega t) + \left[2\tau\epsilon - \frac{8\mu\pi V_0 D^4}{\beta A_D A_c} \left(\frac{L_0}{d^4} + \frac{L_M}{d_M^4} \right) \right] r\omega \sin \omega t \quad (4.27)$$

ou

$$X(t) = a (1 - \cos \omega t) + b \omega r \sin \omega t \quad (4.28)$$

onde

$$a = \frac{A_c r}{A_D} \quad (4.29)$$

$$b = \left[2\tau\epsilon - \frac{8\mu\pi V_0 D^4}{\beta A_D A_c} \left(\frac{L_0}{d^4} + \frac{L_M}{d_M^4} \right) \right] \quad (4.30)$$

Considerando-se que $X(t)$ representa o sinal de excitação do sistema, procede-se agora à solução da Eq. (4.24). Esta solução pode ser obtida utilizando-se transformada de Fourier ou Laplace. O segundo método será utilizado no presente trabalho.

A transformada de Laplace do sinal de excitação é dada por

$$X(s) = \frac{a \omega^2 + b \omega^2 r s}{s (s^2 + \omega^2)} \rightarrow \quad (4.31)$$

Aplicando a transformada de Laplace à equação geral obtém-se a função transferência do sistema

$$\frac{y(s)}{X(s)} = \frac{1}{(\tau^2 s^2 + 2\tau\epsilon s + 1)} \quad (4.32)$$

e o sinal de saída dado por

$$y(s) = \frac{b \omega^2 r s + a \omega^2}{s(s^2 + \omega^2) (\tau^2 s^2 + 2\tau\epsilon s + 1)} \rightarrow \quad (4.33)$$

Resolvendo por funções parciais obtém-se

$$\frac{(a-b) s^2 + (2\tau\epsilon-c) r \omega^2 s + a \omega^2}{s(s^2 + \omega^2) (\tau^2 s^2 + 2\tau\epsilon s + 1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2} + \frac{Ds + E}{(\tau^2 s^2 + 2\tau\epsilon s + 1)} \quad (4.34)$$

Desta forma, obtendo-se as constantes A, B, C, D, e E e tomando-se a transformada inversa de cada um dos termos da equação, chega-se à solução da equação diferencial no domínio do tempo.

$$y(t) = A + B \cos \omega t + \frac{C \sin \omega t}{\omega} +$$

$$D \omega^2 \left[\frac{-1}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon \omega_n t} \sin \left[\omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2} t - \phi \right] \right] +$$

$$E \left[\frac{\omega_n}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} e^{-\epsilon \omega_n t} \sin \left[\omega_n \sqrt{1 - \epsilon^2} t \right] \right] \quad (4.35)$$

Como quando $t \rightarrow \infty$, o 4^o e 5^o termos da Eq. (4.35) tendem a zero, constitui-se a solução periódica final somente pelos 3 primeiros termos.

$$y(t) = A + B \cos \omega t + \frac{C \sin \omega t}{\omega} \quad (4.36)$$

ou

$$y(t) = a - \left[\frac{2b\tau\epsilon\omega^2 r + a(1 - \tau^2\omega^2)}{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 4\tau^2\epsilon^2\omega^2} \right] \cos \omega t +$$

$$\left[\frac{2b\tau\epsilon\omega^2(1 - \tau^2\omega^2) + a(1 - \tau^2\omega^2)^2 - a}{2\tau\epsilon\omega[(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 4\tau^2\epsilon^2\omega^2]} \right] \sin \omega t \quad (4.37)$$

Como o parâmetro de interesse é a velocidade, pode-se derivar a equação anterior e obter-se uma expressão correspondente ao sinal de saída do modelo.

$$\dot{y}(t) = \left[\frac{4b\tau^2\epsilon^2\omega^3 r + 2a\tau\epsilon\omega(1 - \tau^2\omega^2)}{2\tau\epsilon[(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 4\tau^2\epsilon^2\omega^2]} \right] \sin \omega t +$$

$$\left[\frac{2b\tau\epsilon\omega^2(1 - \tau^2\omega^2) + a(1 - \tau^2\omega^2)^2 - a}{2\tau\epsilon\omega[(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 4\tau^2\epsilon^2\omega^2]} \right] \cos \omega t \quad (4.38)$$

Usando a identidade trigonométrica

$$p \cos \theta + q \sin \theta = R \sin (\theta + \phi) \quad (4.39)$$

onde

$$R = \sqrt{p^2 + q^2} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{p}{q} \quad (4.40)$$

obtém-se finalmente

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = r\omega & \left\{ \left[a^2(1 - \tau^2\omega^2)^4 + 4ab\tau\epsilon\omega^2r(1 - \tau^2\omega^2)^3 \right. \right. \\ & + (1 - \tau^2\omega^2)^2(4b^2\tau^2\epsilon^2\omega^4r^2 + 4a^2\tau^2\epsilon^2\omega^2 - 2a^2) \\ & + (1 - \tau^2\omega^2)(16ab\tau^3\epsilon^3\omega^4r + 4ab\tau\epsilon\omega^2r) \\ & \left. + 16b^2\tau^4\epsilon^4\omega^6r^2 + a^2 \right] / 4\tau^2\epsilon^2\omega^2r^2 \left[(1 - \tau^2\omega^2)^4 + \right. \\ & \left. \left. 8\tau^2\epsilon^2\omega^2 \left\{ (1 - \tau^2\omega^2)^2 + 2\tau^2\epsilon^2\omega^2 \right\} \right] \right\}^{1/2} \sin(\omega t + \theta) \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde

$$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{2b\tau\epsilon\omega^2(1 - \tau^2\omega^2) + a(1 - \tau^2\omega^2)^2 - a}{4b\tau^2\epsilon^2\omega^3r + 2a\tau\epsilon\omega(1 - \tau^2\omega^2)} \right\} \quad (4.42)$$

As Eqs. (4.41) e (4.42) descrevem o comportamento de um sistema vibratório de segunda ordem onde a função estímulo é uma função senoidal. Estas equações descrevem de modo completo as características dinâmicas do sistema oscilatório para a faixa em que os parâmetros envolvidos têm sentido físico. Note-se que a resposta de um sistema dinâmico a uma função estímulo senoidal é, ao final de um certo tempo, senoidal com a mesma frequência da função estímulo.

Como a função estímulo é dada por $\dot{x}(t) = r\omega \sin \omega t$, a função resposta do sistema, $\dot{y}(t)$, pode ser expressa como

$$\dot{y}(t) = R_a \dot{x}(t) = R_a r \omega \sin (\omega t + \theta) \quad (4.43)$$

Aqui R_a representa o ganho do sistema, ou seja, a razão entre a amplitude do sinal de resposta $\dot{y}(t)$ e a amplitude do sinal de estímulo $\dot{x}(t)$, e é constituído pelos termos entre chaves da Eq. (4.41), dados por

$$\begin{aligned} R_a = & \left\{ \left[a^2(1 - \tau^2\omega^2)^4 + 4ab\tau\epsilon\omega^2r(1 - \tau^2\omega^2)^3 \right. \right. \\ & + (1 - \tau^2\omega^2)^2(4b^2\tau^2\epsilon^2\omega^4r^2 + 4a^2\tau^2\epsilon^2\omega^2 - 2a^2) \\ & + (1 - \tau^2\omega^2)(16ab\tau^3\epsilon^3\omega^4r + 4ab\tau\epsilon\omega^2r) \\ & \left. + 16b^2\tau^4\epsilon^4\omega^6r^2 + a^2 \right] / 4\tau^2\epsilon^2\omega^2r^2 \left[(1 - \tau^2\omega^2)^4 + \right. \\ & \left. \left. 8\tau^2\epsilon^2\omega^2 \left\{ (1 - \tau^2\omega^2)^2 + 2\tau^2\epsilon^2\omega^2 \right\} \right] \right\}^{1/2} \quad (4.44) \end{aligned}$$

Por outro lado, θ representa a fase do sistema, ou seja, o atraso com relação ao estímulo, devido principalmente ao atrito viscoso.

Desta forma a vazão dinâmica na placa, obtida pelo modelo analítico, é determinada multiplicando-se a velocidade, dada pela Eq. 4.45, pela área da seção do cilindro, ou seja

$$Q_{ta}(t) = A_c r \omega R_a \sin (\omega t + \theta) \quad (4.45)$$

Note que se a área da seção do cilindro for diferente da área da seção do duto, a expressão para a vazão fica

$$Q_{ta}(t) = \frac{A_c^2}{A_D} r \omega R_a \sin(\omega t + \theta) \quad (4.56)$$

Desta forma, a dissipação da flutuação da vazão, caracterizada pelos parâmetros R_a e θ , pode ser obtida sempre que o módulo da perturbação for conhecido. A razão de amplitude, R_a , e a fase, θ , da flutuação de vazão amortecida são funções dos parâmetros físicos característicos do sistema dinâmico utilizado. A compressibilidade do sistema, as frequências das oscilações, as vazões médias utilizadas, os comprimentos e diâmetros das mangueiras utilizadas para as conexões e retorno, além dos parâmetros geométricos do orifício, constituem os fatores que mais influenciam na dissipação da flutuação de vazão. A influência de outros parâmetros tais como dimensões da instalação, comprimento da cavidade, outros fluidos de trabalho, etc., não foram analisadas no presente trabalho.

4.3 - COMPORTAMENTO DO MODELO

As Figs. 4.3 a 4.24 mostram o comportamento global do modelo com a variação dos principais parâmetros físicos envolvidos e para valores de β correspondentes a um ganho entre 0 e 1. As Figs. 4.3 a 4.5 mostram a variação da razão de amplitude (ganho) com a compressibilidade do sistema, para as frequências de 2, 6 e 10 Hz, respectivamente. À medida que o sistema torna-se mais incompressível (aumento de β), o ganho se aproxima de 1, indicando que a velocidade da massa do fluido deslocado não é mais função da compressibilidade.

Por outro lado, à medida que a compressibilidade do sistema aumenta (diminuição de β) o ganho tende a zero, para um determinado valor de β , indicando que para este valor, todo o pulso é amortecido antes de atingir a distância L_e , ou seja, $\dot{y}(t) = 0$. A partir deste ponto o modelo perde sua validade. Note-se que tanto o aumento da frequência como o aumento da vazão

constante Q_0 , contribuem para uma queda mais acentuada do ganho. Isto significa que para um sistema com uma determinada compressibilidade, o aumento gradativo de Q_0 ou o aumento gradativo da frequência de pulsação diminuem sensivelmente o ganho do sistema. Para uma vazão constante Q_0 de $1 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$ e frequência de 2 Hz, por exemplo, o sistema teria que ser bem incompressível ($\beta > 1 \times 10^9$) para que a flutuação de vazão possa se propagar até a distância L_e . No entanto, para uma vazão, $Q_0 = 3,082 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, um sistema com uma compressibilidade acima de $3,0 \times 10^6$ seria necessário para o pulso de vazão atingir a distância L_e .

As Figs. 4.3 a 4.5 mostram também que o aumento da frequência afeta mais acentuadamente o ganho dos sistemas mais compressíveis. Para uma frequência de 2 Hz e $Q_0 = 3,082 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, por exemplo, o ganho é zero para um valor de $\beta \approx 3,0 \times 10^6$. No entanto, para uma frequência de 10 Hz, o ganho atinge o zero para um valor de β de $5,5 \times 10^7$, com a mesma vazão Q_0 . Num sistema mais incompressível, tanto a frequência como a vazão Q_0 teriam muito menor influência no ganho do sistema.

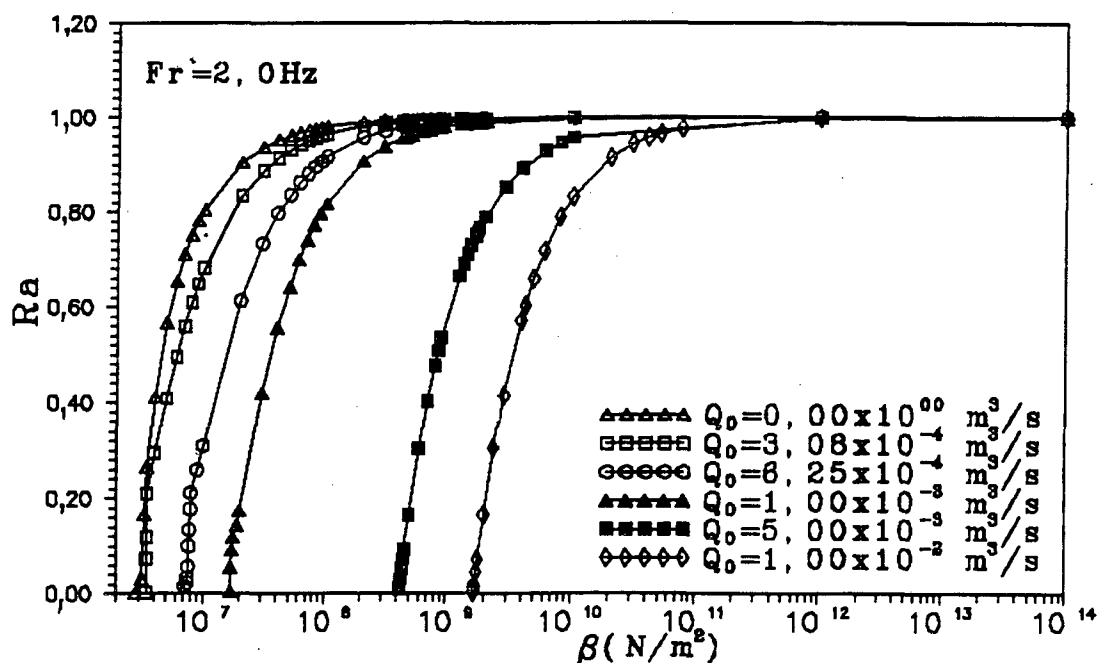


Fig. 4.3 - Variação do ganho com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência cíclica de 2 Hz.

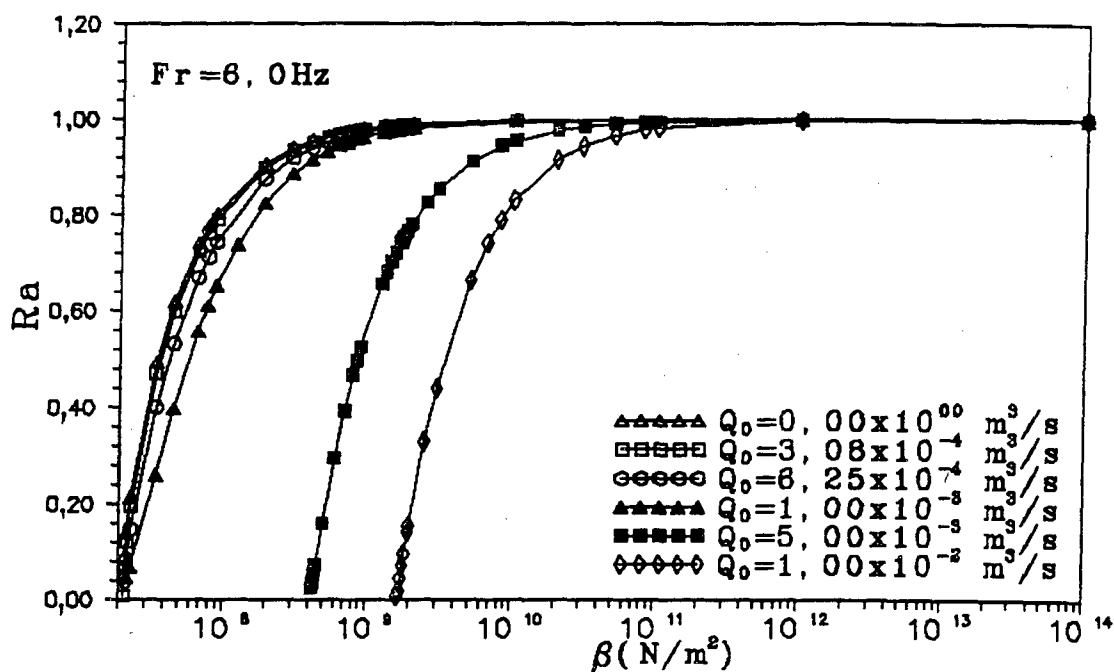


Fig. 4.4 - Variação do ganho com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência de 6 Hz.

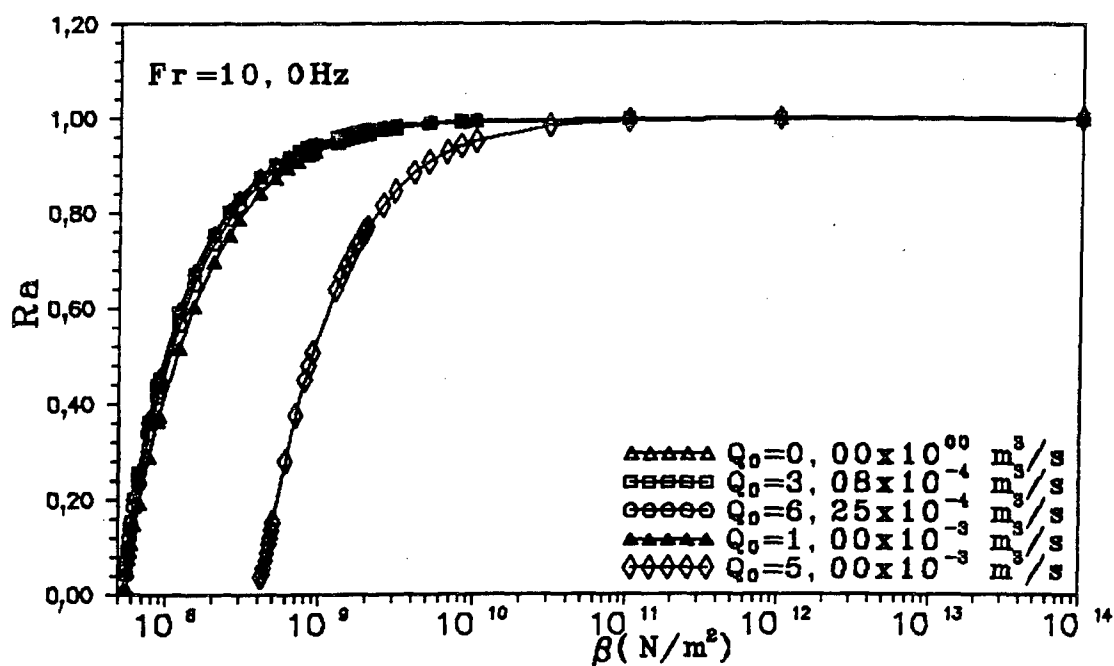


Fig. 4.5 - Variação do ganho com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência de 10 Hz.

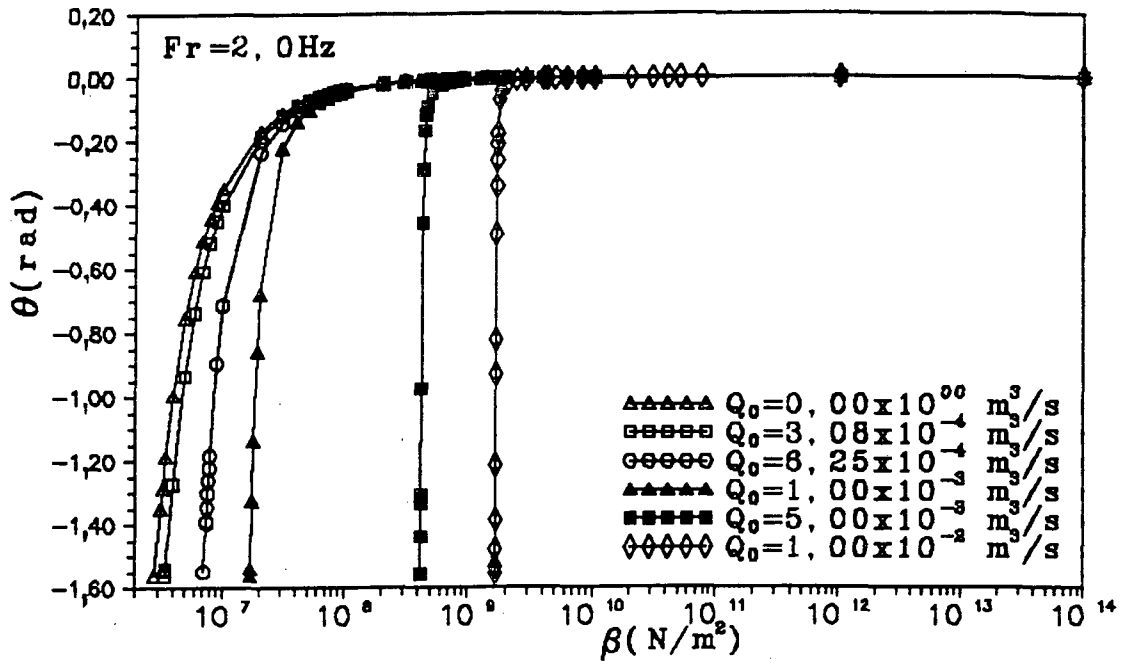


Fig. 4.6 - Variação da fase com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência de 2 Hz.

As Figs. 4.6 a 4.8 ilustram a mesma análise para o ângulo de fase do sistema. À medida que a compressibilidade aumenta (diminuição de β) a fase tende a -90° ($-1,57 \text{ rad}$) e se aproxima de zero à medida que o sistema

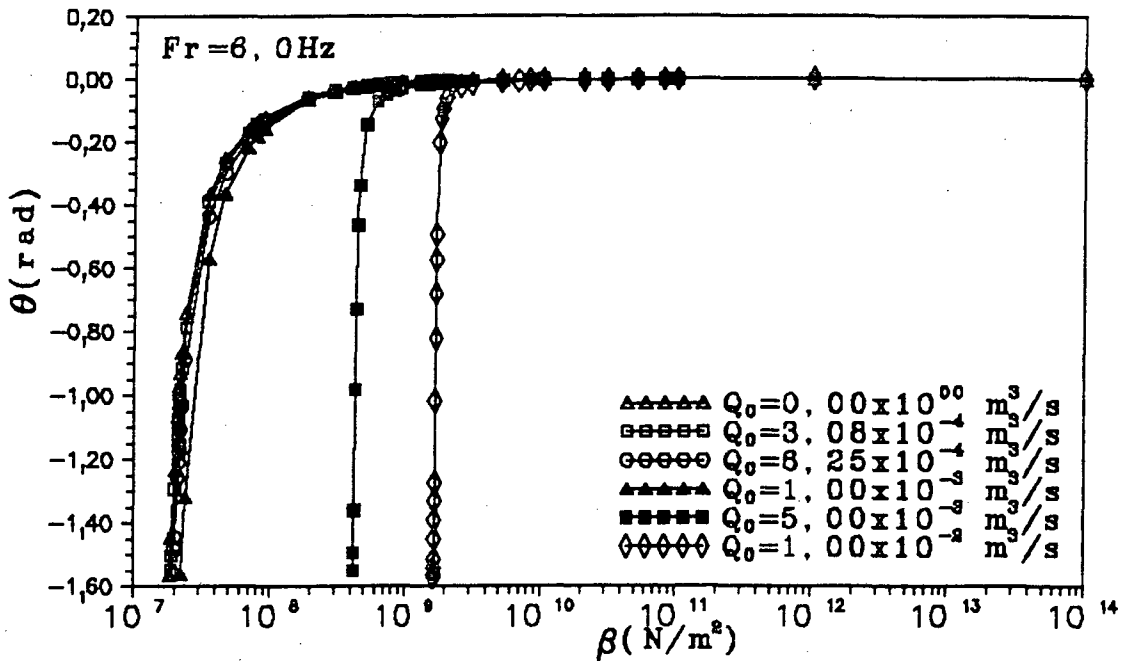


Fig. 4.7 - Variação da fase com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência de 6 Hz.

torna-se mais incompressível (aumento de β). A fase também é afetada pela vazão Q_0 e pela frequência de pulsação do sistema, sendo essa influência cada vez menor à medida que β aumenta (sistemas mais incompressíveis).

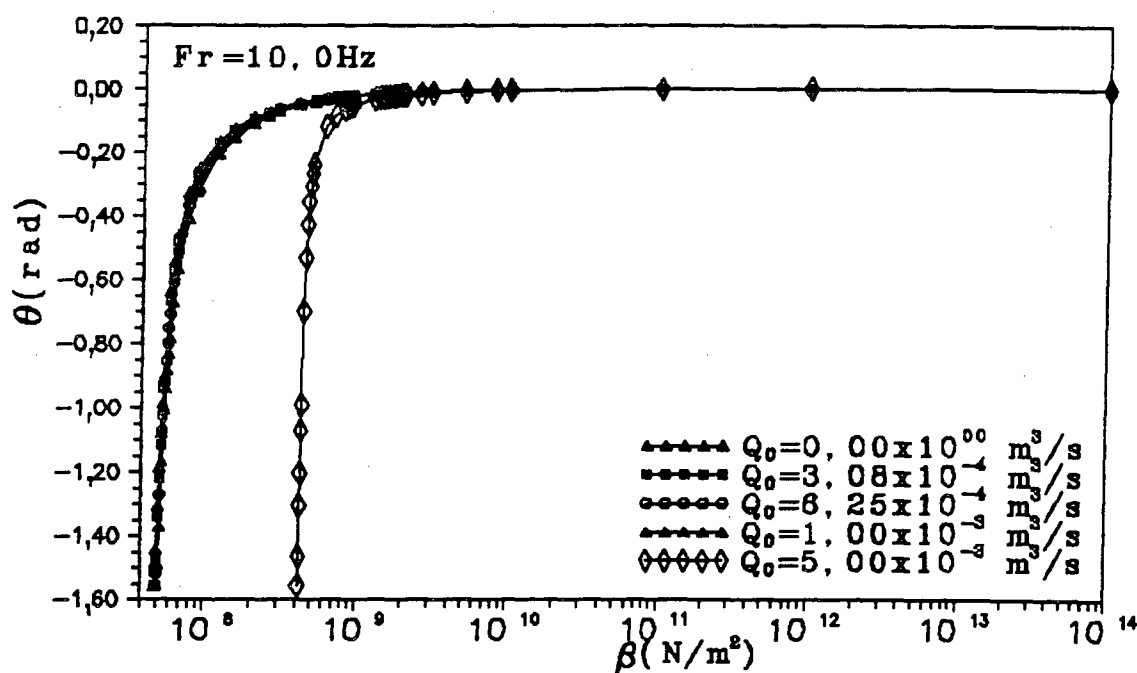


Fig. 4.8 - Variação da fase com o fator de compressibilidade para vários valores de Q_0 e frequência de 10 Hz.

As Figs. 4.9 e 4.10 mostram a variação do ganho e da fase, respectivamente, com a frequência de pulsação do sistema, para vários valores de Q_0 . Note-se que para um valor de $\beta = 10^8 \text{ N/m}^2$ o ganho se aproxima de zero e a fase de -90° quando o sistema atinge uma frequência próxima dos 14 Hz. Por outro lado, como dito anteriormente, para ambos os casos a queda é maior para maiores valores de Q_0 . Desta forma, a validação deste modelo é limitada à faixa de frequências na qual o ganho é positivo ($0 < Ra \leq 1$), com a fase variando entre 0 e -90° ($-\pi/2 < \theta \leq -0$). No presente trabalho, frequências de até 11,5 Hz foram obtidas experimentalmente. Para aumentar a faixa de frequências, fluidos mais incompressíveis, como água, poderiam ser utilizados com estruturas mais rígidas. Para o óleo, poderia-se ainda aumentar a faixa de frequências através do aumento do nível de pressão.

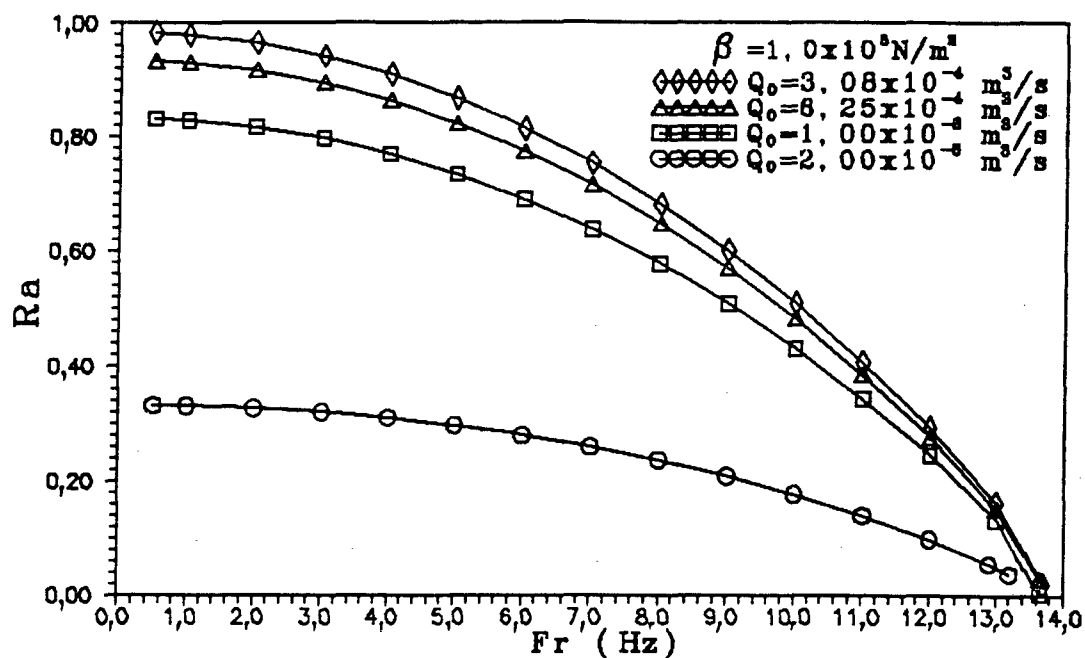


Fig. 4.9 - Comportamento do ganho com a frequência, para vários valores de Q_0 e $\beta = \text{cte.}$

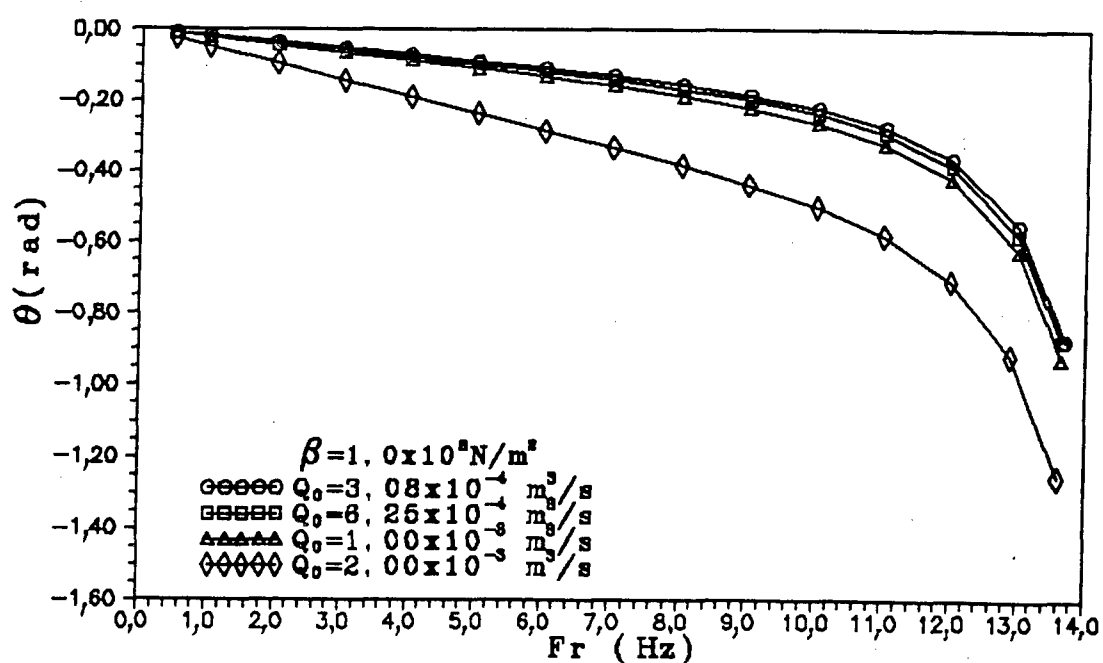


Fig. 4.10 - Comportamento da fase com a frequência, para vários valores de Q_0 e $\beta = \text{cte.}$

As Figs. 4.11 a 4.16 mostram a influência da vazão média Q_0 no ganho e na fase do sistema, para vários valores de β . Nota-se que a influência de Q_0 cresce à medida que a compressibilidade do sistema aumenta (valores menores de β).

As Figs. 4.11 a 4.13 mostram que para uma determinada frequência e para um valor constante de β , o aumento gradativo da vazão média pode cancelar a flutuação de vazão, introduzindo um ganho próximo de zero, quando Q_0 atingir um determinado valor. Nota-se que o valor de Q_0 para o qual o ganho é zero depende somente da compressibilidade do sistema, independentemente da frequência aplicada. Isto é, por exemplo, para frequências de 2,0 Hz e 10,0 Hz o valor de Q_0 correspondente ao ganho igual a zero é o mesmo, para os mesmos valores de β . Comparando-se a Fig. 4.11 com a 4.13 nota-se que para $\beta = 1,0 \times 10^8 \text{ N/m}^2$, $R_a \approx 0$ para $Q_0 = 4,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$. Por outro lado, para $\beta = 1,0 \times 10^9 \text{ N/m}^2$, $R_a \approx 0$ para $Q_0 = 7,7 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$, independentemente da frequência aplicada. Pode-se concluir ainda das Figs. 4.11 a 4.13 que o aumento da frequência contribui para uma queda mais rápida do ganho do sistema.

As Figs. 4.14 a 4.16 mostram a variação da fase com a vazão média Q_0 . Para as mesmas compressibilidades e frequências, nota-se que a fase tende a $-\pi/2$ para os mesmos valores de Q_0 correspondentes ao ganho igual a zero. Da mesma forma que no ganho, o aumento da frequência contribui para uma queda mais acentuada da fase. Também na fase, a influência de Q_0 é mais acentuada para valores menores de β (sistemas mais compressíveis).

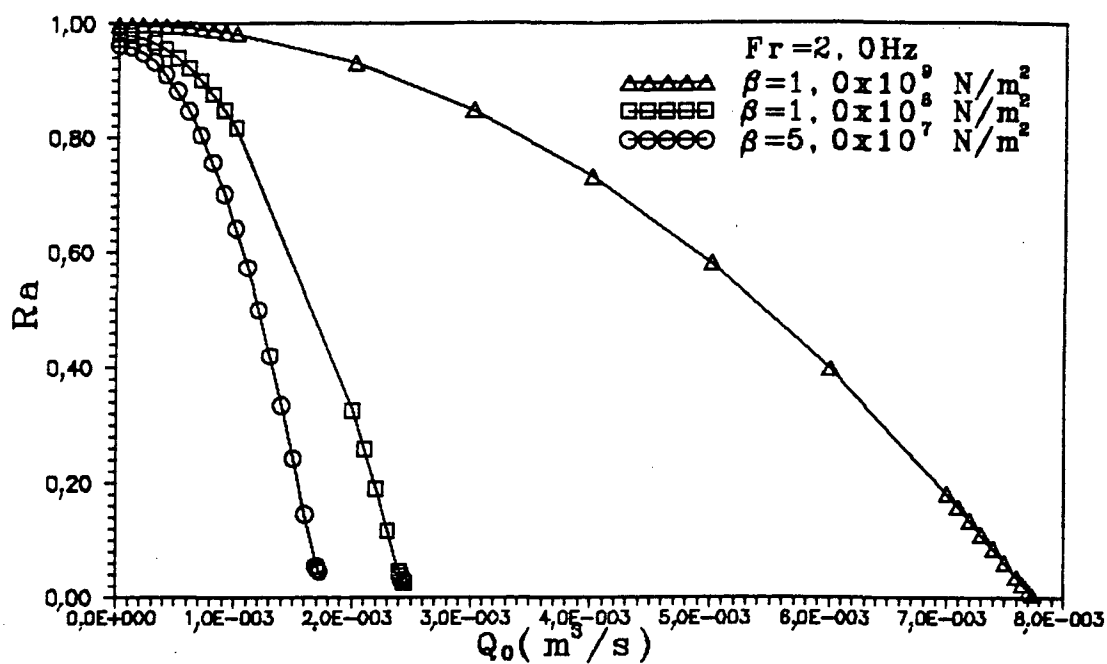


Fig. 4.11 - Influência da vazão Q_0 no ganho do sistema, para vários valores de β e frequência de 2 Hz.

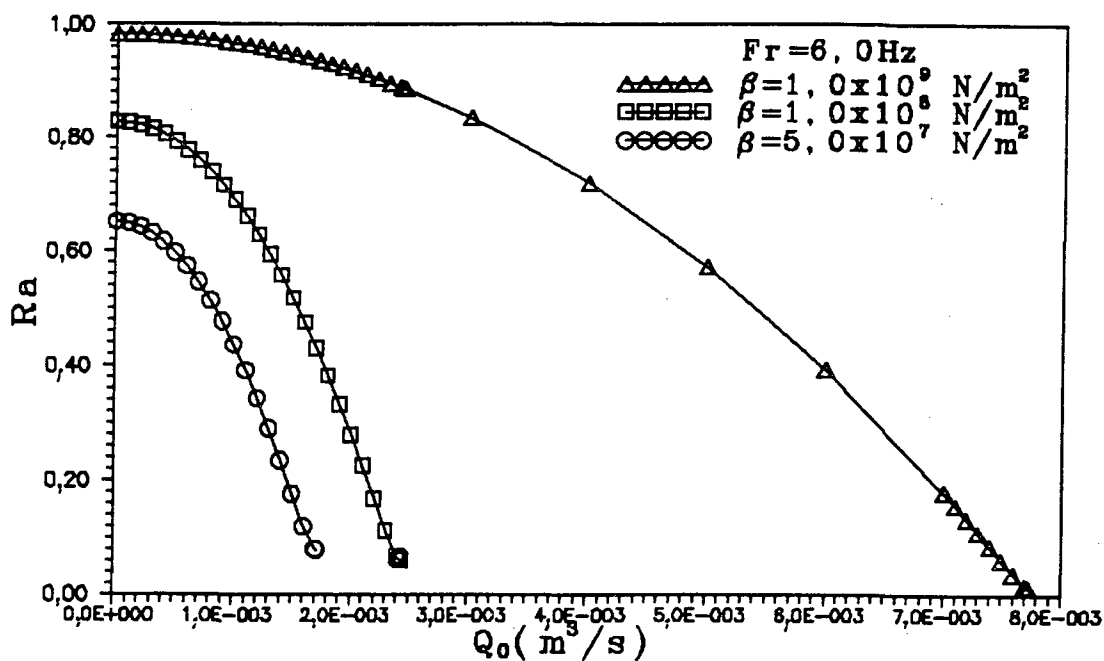


Fig. 4.12 - Influência da vazão Q_0 no ganho do sistema, para vários valores de β e frequência de 6 Hz.

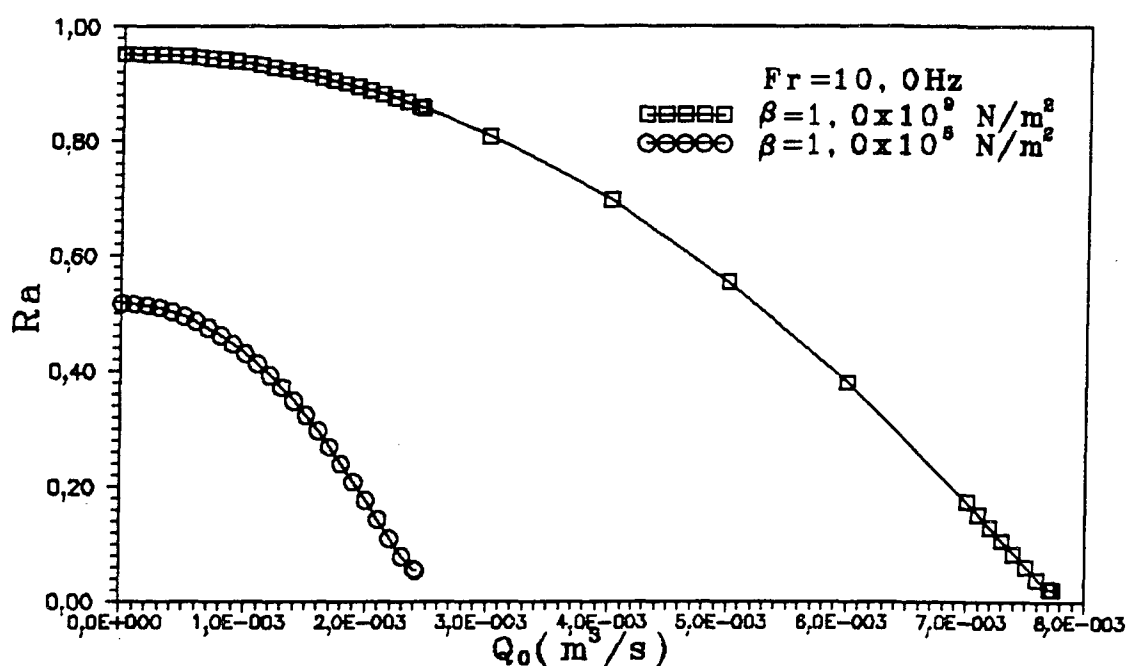


Fig. 4.13 - Influência da vazão Q_0 no ganho do sistema, para vários valores de β e frequência de 10 Hz.

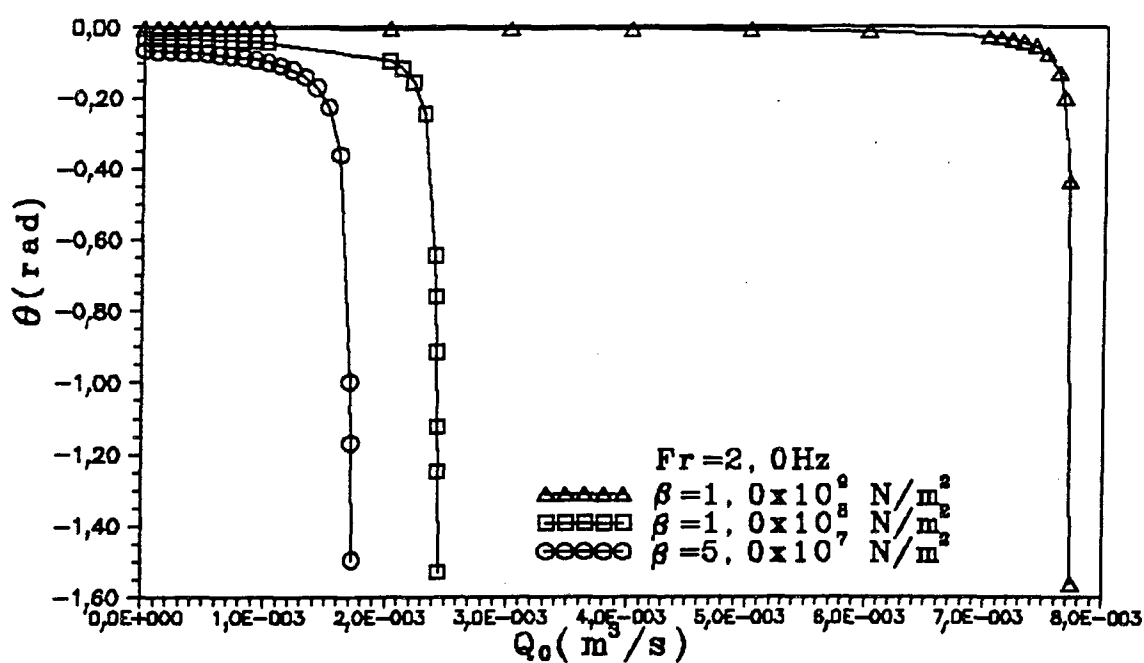


Fig. 4.14 - Influência da vazão Q_0 na fase do sistema, para vários valores de β e frequência de 2 Hz.

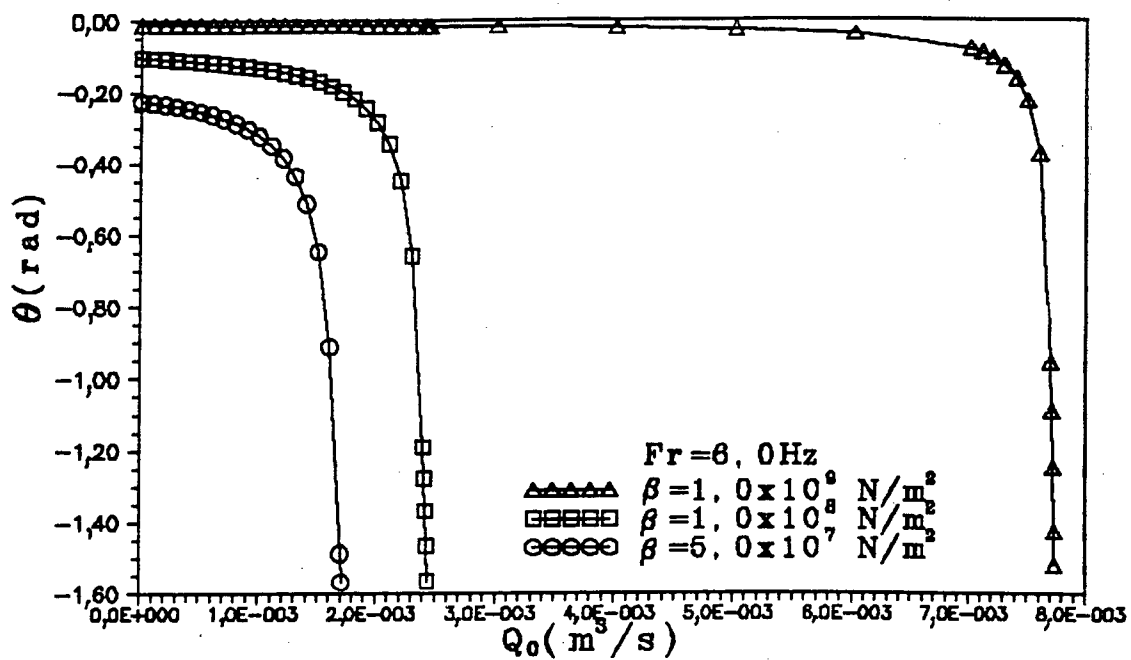


Fig. 4.15 - Influência da vazão Q_0 na fase do sistema, para vários valores de β e frequência de 6 Hz.

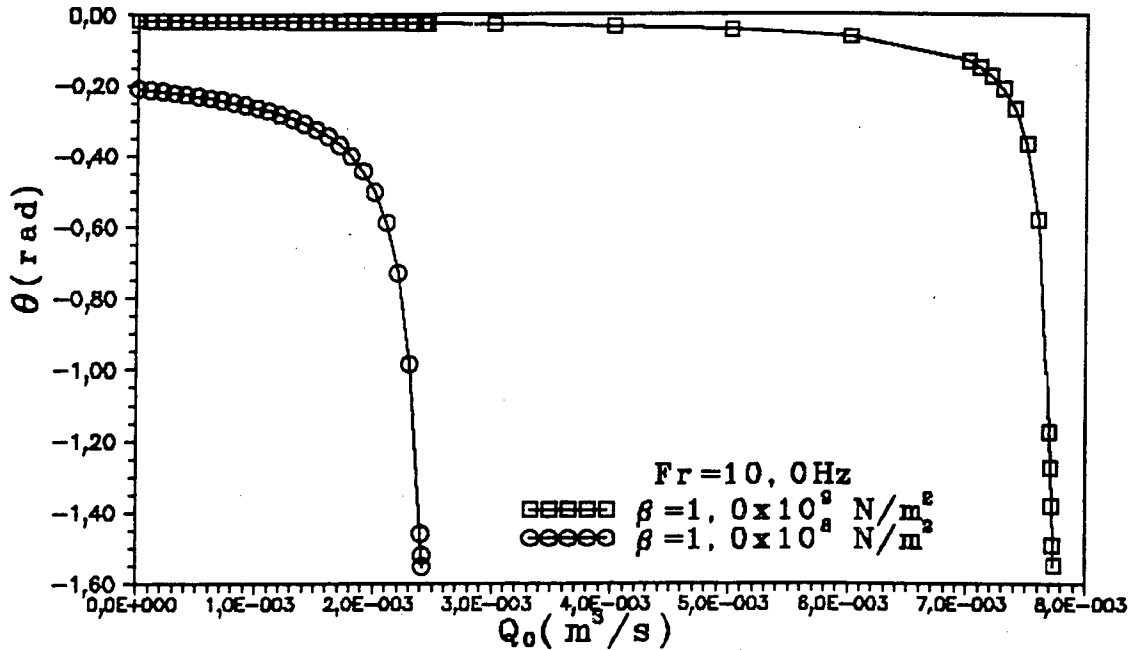


Fig. 4.16 - Influência da vazão Q_0 na fase do sistema, para vários valores de β e frequência de 10 Hz.

As Figs. 4.17 a 4.24 mostram a variação dos parâmetros dissipativos com a geometria do orifício. As Figs. 4.17 e 4.18 mostram a

variação do ganho com a relação de diâmetros do orifício, para frequências de 2 e 6 Hz, respectivamente. Nota-se que para relações de diâmetros acima de 0,15 o ganho permanece praticamente constante, sendo função apenas dos demais parâmetros. A fase é também pouco afetada para relações de diâmetros acima de 0,15, tal como observado nas Figs. 4.19 e 4.20. Neste caso nota-se também que a fase é pouco influenciada pela vazão média Q_0 . As Figs. 4.21 e 4.22 mostram a variação do ganho com o comprimento do orifício para frequências de 2 e 6 Hz, respectivamente. Neste caso, a variação do ganho é mais acentuada à medida que o comprimento do orifício aumenta. Observa-se que a flutuação pode ser totalmente dissipada aumentando-se somente o comprimento do orifício. A Fig. 4.20 mostra, por exemplo, que para uma frequência de 2 Hz, a flutuação seria praticamente amortecida para um comprimento do orifício de aproximadamente 30 cm. No entanto, para uma frequência de 6 Hz, a flutuação seria amortecida num orifício com apenas 8 cm de comprimento, tal como mostra a Fig. 4.22. As Figs. 4.23 e 4.24 mostram a variação da fase com o comprimento do orifício, para as mesmas frequências anteriores. Para ambas as frequências nota-se que a fase varia linearmente com o comprimento do orifício. Novamente pode-se notar a

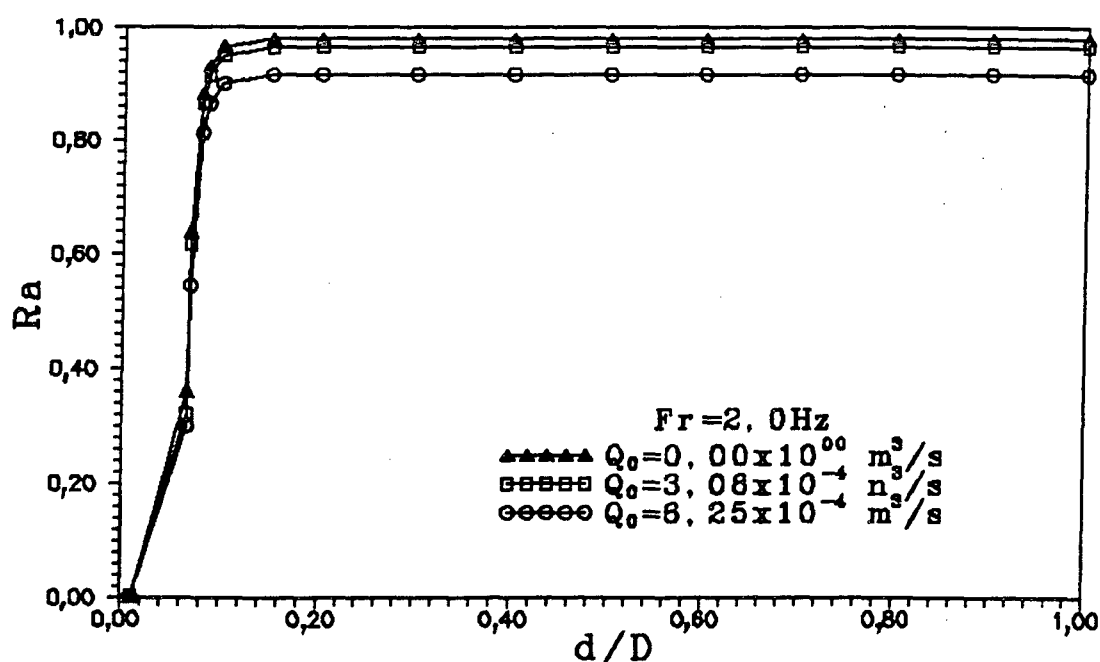


Fig. 4.17 - Variação do ganho com a relação de diâmetros do orifício. Fr = 2 Hz.

pequena variação da fase com a vazão média Q_0 . Por outro lado, pode-se observar que para ambas as frequências, a fase não tende ao seu limite inferior ($-\pi/2$) nos pontos onde $Ra \approx 0$. No entanto, a fase tende ao mesmo valor, independentemente da frequência da flutuação.

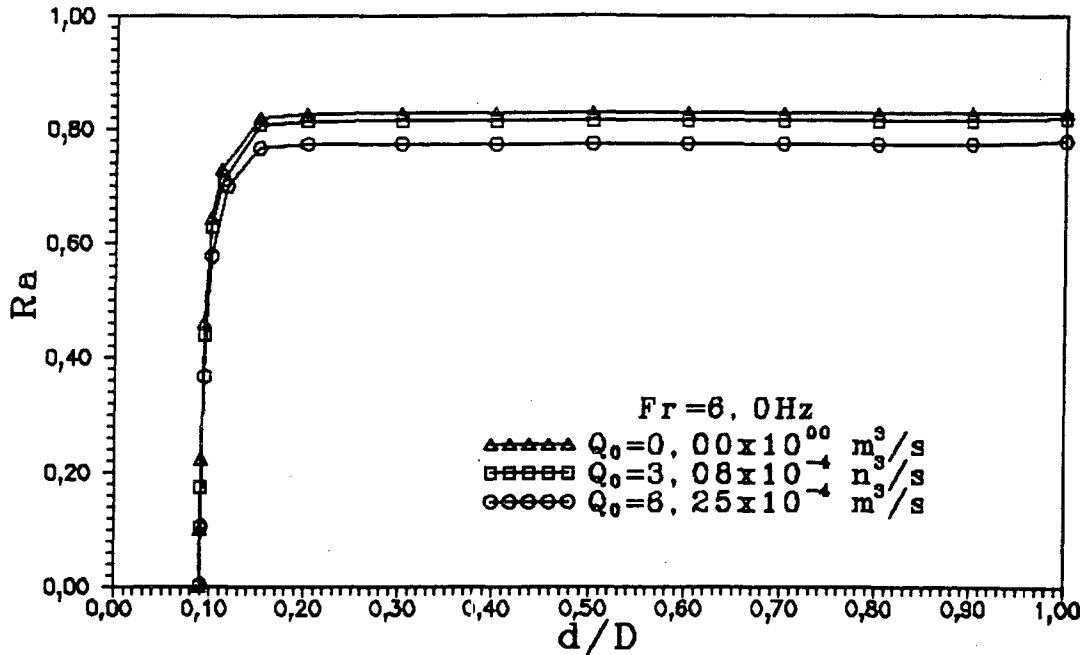


Fig. 4.18 - Variação do ganho com a relação de diâmetros do orifício. $Fr = 6 \text{ Hz}$.

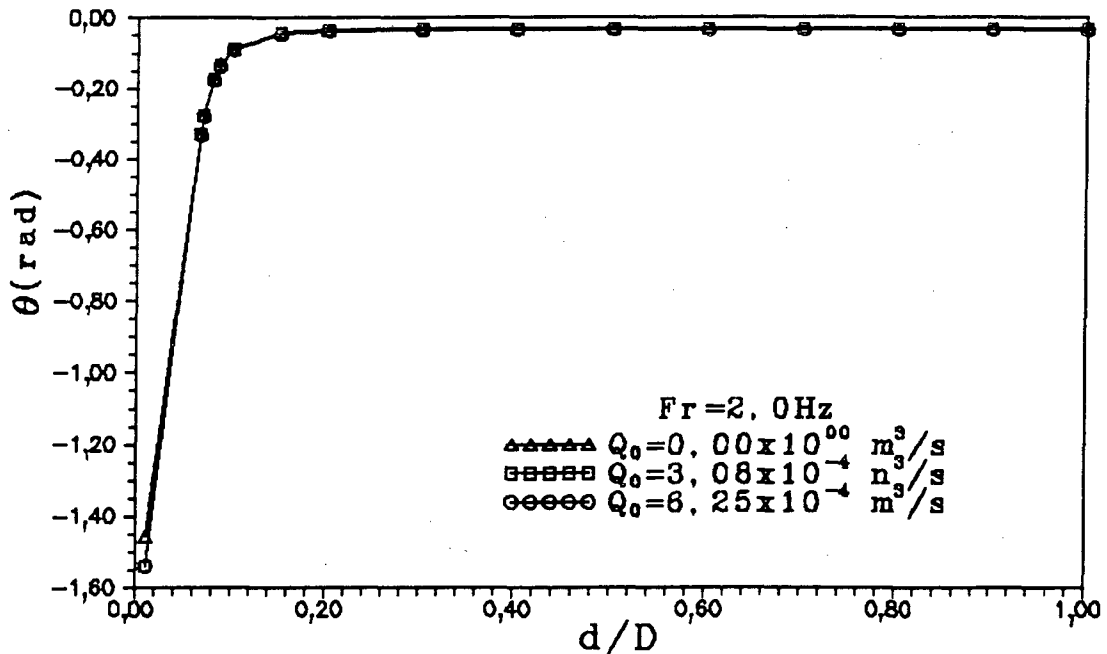


Fig. 4.19 - Variação da fase com a relação de diâmetros do orifício. $Fr = 2 \text{ Hz}$.

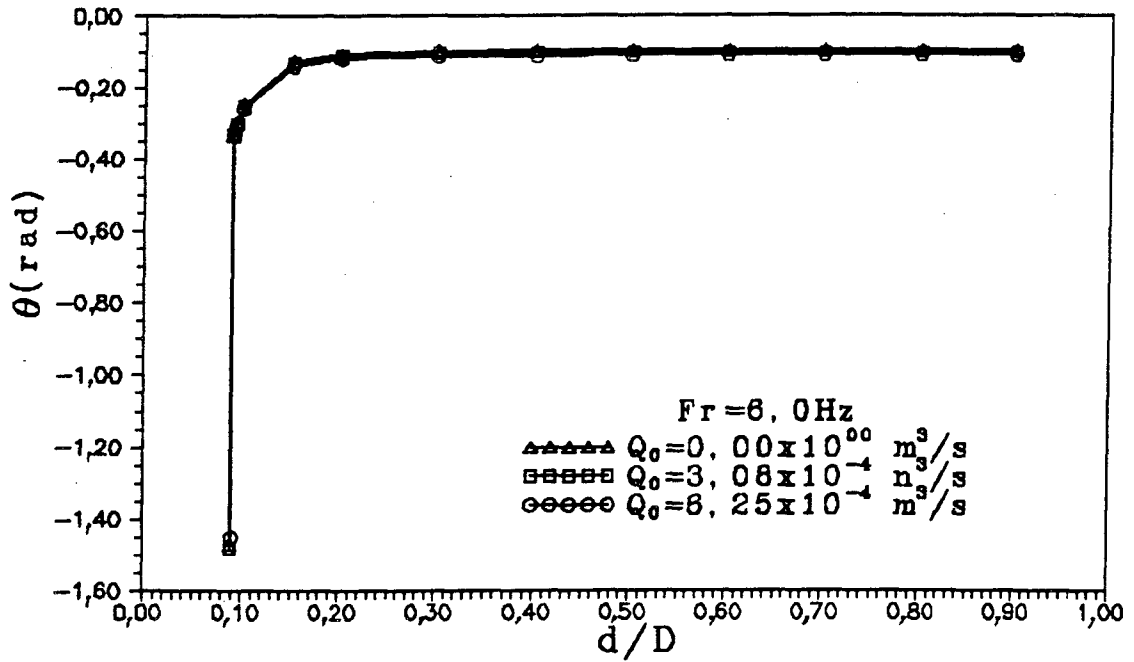


Fig. 4.20 - Variação da fase com a relação de diâmetros do orifício. $Fr = 6 \text{ Hz}$.

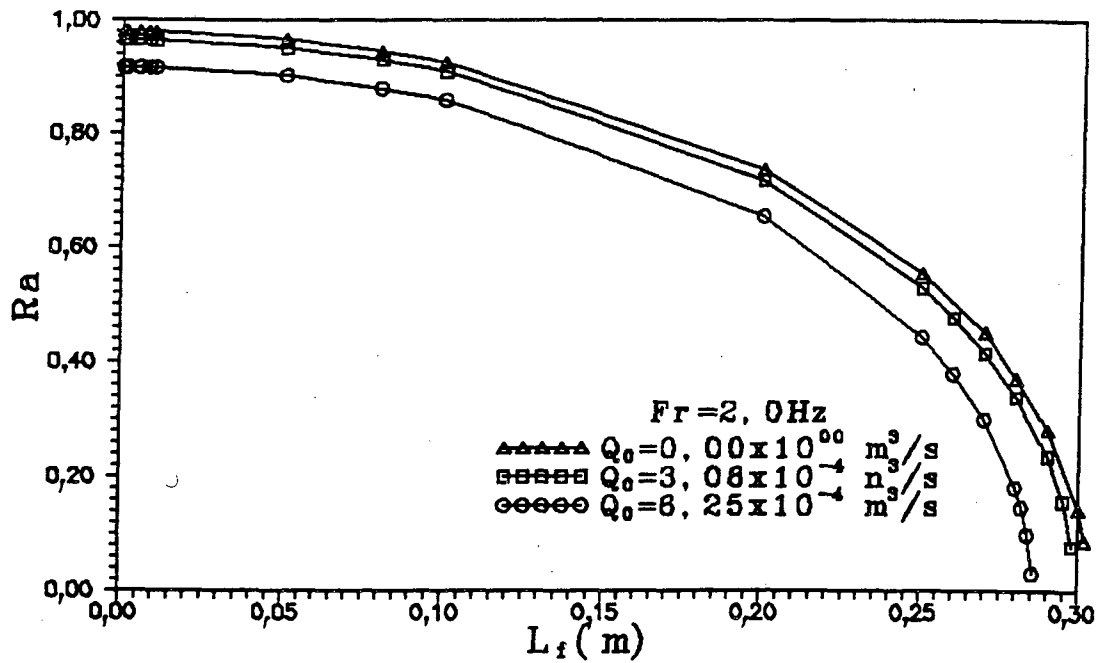


Fig. 4.21 - Variação do ganho com o comprimento do orifício. $Fr = 2 \text{ Hz}$.

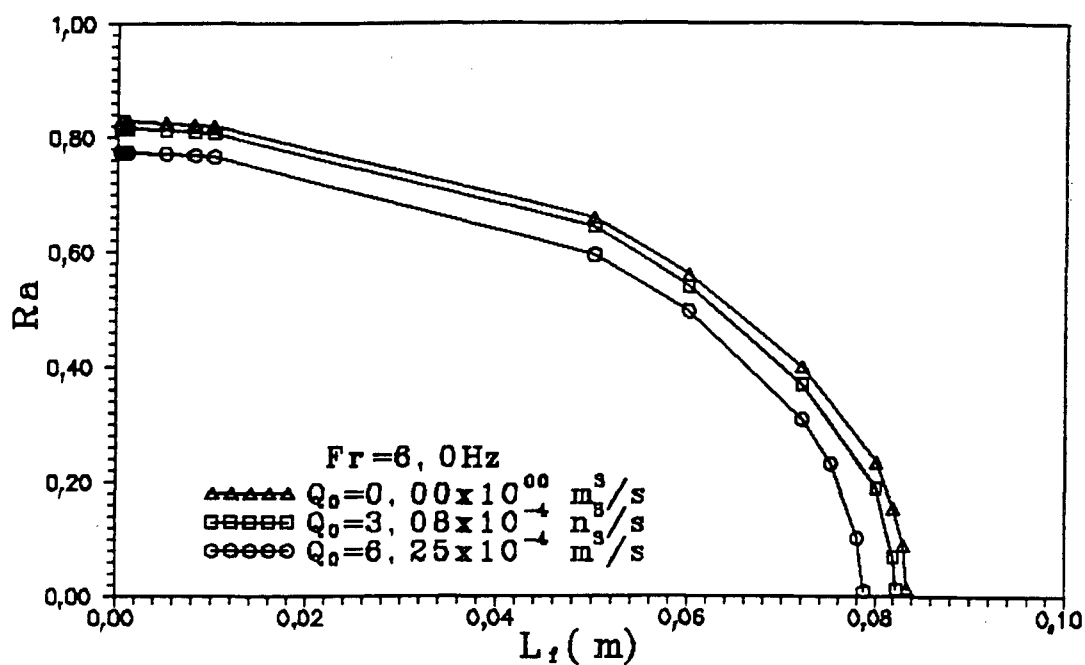


Fig. 4.22 - Variação do ganho com o comprimento do orifício. Fr = 6 Hz.

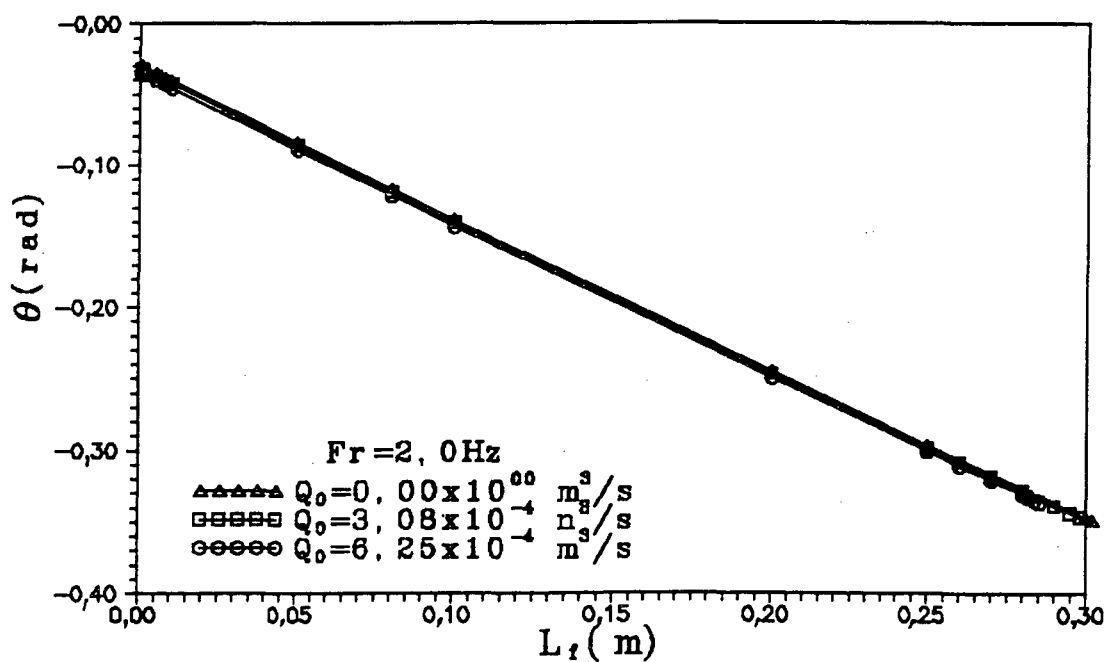


Fig. 4.23 - Variação da fase com o comprimento do orifício. Fr = 2 Hz.

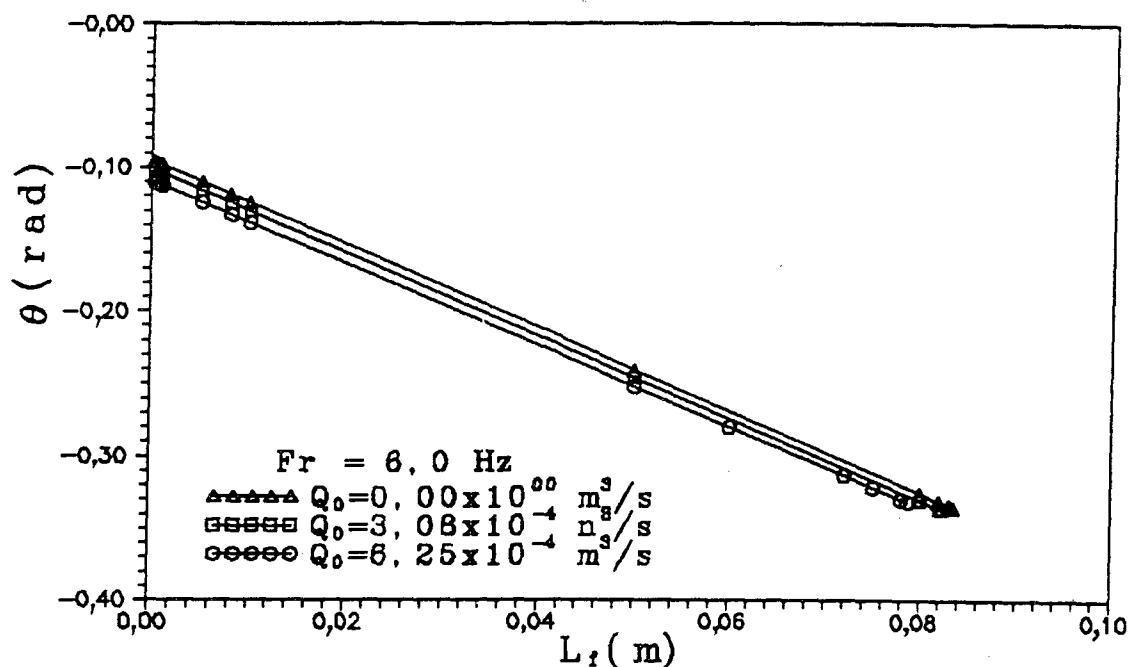


Fig. 4.24 - Variação da fase com o comprimento do orifício. Fr = 6 Hz.

Análises semelhantes podem ser realizadas com os demais parâmetros, tais como comprimentos e diâmetros de mangueiras à jusante da placa, comprimento da cavidade, diferentes tipos de fluido, entre outros.

A análise dos principais fatores que contribuem para a dissipação da flutuação de vazão, tal como mostrado nas Figs 4.3 a 4.24, indica claramente que a analogia de um sistema fluido-dinâmico com um sistema mecânico amortecido é perfeitamente válida, dentro de certas limitações, permitindo fazer uma síntese do comportamento dinâmico do sistema.

Para a sua completa validação física, os resultados analíticos obtidos pelo modelo são ainda comparados com os resultados experimentais. Esta comparação é realizada no Cap. 7.

5.1 - INTRODUÇÃO

A solução numérica das equações de Navier Stokes utilizando-se a técnica de volumes finitos com malhas generalizadas não ortogonais constitui a metodologia numérica utilizada neste trabalho. A descrição geral desta metodologia pode ser encontrada em Maliska [52] e [63] e Silva [53]. O grande atrativo desta metodologia é o fato da solução ser obtida em um domínio computacional fixo, independente da forma da geometria física do problema, podendo ainda as fronteiras do domínio apresentarem variação com o tempo sem alterar o domínio computacional. Com isto, o programa computacional que resolve o problema físico torna-se bem mais geral, sendo as informações da geometria transferidas ao mesmo tempo, através das métricas da transformação. As coordenadas dos pontos que definem a geometria arbitrária são dados de entrada para o programa computacional que faz a geração do sistema de coordenadas coincidente com a fronteira. O objetivo desta metodologia é a solução de um sistema de equações diferenciais parciais com as respectivas condições de contorno, seguindo as seguintes etapas básicas(Maliska [52]):

- a) transformação e geração do sistema de coordenadas generalizadas (geração da malha);
- b) transformação do sistema de equações governantes do problema físico;
- c) obtenção das equações aproximadas para os volumes elementares;
- d) solução dos sistemas de equações algébricas lineares.

Basicamente a solução numérica das equações de transporte utilizando coordenadas generalizadas envolve dois algoritmos principais; um

para a geração do sistema de coordenadas (geração de malhas) e outro para a solução do problema físico propriamente dito. Estes algoritmos podem ser completamente independentes um do outro.

O uso dos sistemas ortogonais como cartesiano, cilíndrico, esférico, etc., apresentam grandes limitações, pois são adequados apenas para geometrias cujas fronteiras coincidem com o sistema coordenado (Patankar [64]). Para se evitar interpolações ou limitações que produzam soluções imprecisas, produto da aplicação incorreta das condições de contorno nas fronteiras de interesse, deve-se procurar sistemas que se adaptem à geometria. Estes sistemas coordenados podem ser ortogonais ou não ortogonais. No caso particular do problema da placa de orifício, o sistema generalizado cilíndrico não poderia ser aplicado quando o ângulo do chanfro da placa for diferente de 0° . A solução então é criar um sistema que se adapte às fronteiras do domínio de cálculo (sistema de coordenadas generalizadas). Procedendo-se dessa forma, discretiza-se o domínio e expressam-se as equações governantes de acordo com o novo sistema. As equações assim descritas são chamadas equações governantes transformadas e o domínio de cálculo, quando desenhado em função dos novos eixos coordenados, dá origem a um domínio retangular, o qual é denominado de plano transformado (Thompson [54] e [55]).

5.2 - TRANSFORMAÇÃO E GERAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

O desenvolvimento dos sistemas não ortogonais para a discretização é devido principalmente a Thompson et al [54] e [55]. Eles utilizam duas equações de tipo Poisson com condições de contorno de Dirichlet para a geração do sistema coordenado.

Considerando-se um domínio arbitrário bidimensional no qual se deseja fazer uma transformação de coordenadas e levar a geometria física a uma geometria retangular, a tarefa de obtenção do novo sistema coordenado, (ξ, η) , a partir do sistema coordenado cilíndrico conhecido, (x, r) , consiste em

determinar as transformações $\xi = \xi(x,r)$ e $\eta = \eta(x,r)$.

Uma vez realizada a transformação, vários processos podem ser empregados na geração da malha, podendo-se citar: o manual, o algébrico e o sistema de equações diferenciais elípticas, entre outros. A aplicabilidade de cada um deles é dependente da geometria a ser discretizada. Enquanto que as geometrias simples (aquelas cujos contornos são alguns segmentos de retas e/ou curvas conhecidas) permitem o emprego fácil de métodos algébricos (polinômios de Legendre, Hermite, etc) as geometrias de contornos muito irregulares podem vir a exigir uma discretização tão elaborada que apenas manualmente se consigam bons resultados. No presente trabalho, um sistema de equações diferenciais elípticas é utilizado para geração da malha. O processo de geração de malha elíptica pode ser visto em Thompson [54] ou em Maliska [52].

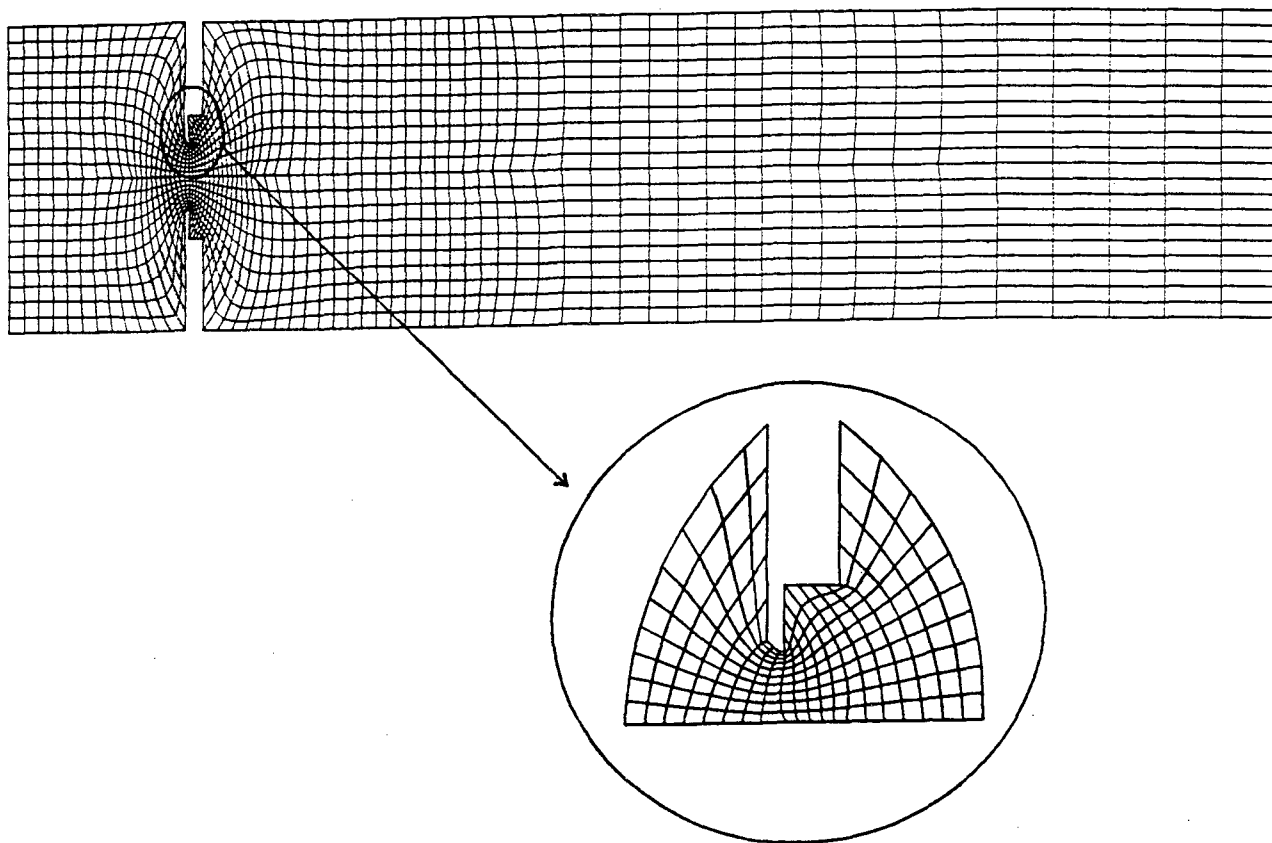


Fig. 5.1 - Malha 220 x 10 para a placa E1.

As Figs. 5.1 a 5.5 mostram as malhas utilizadas para as diferentes geometrias de orifícios nas placas. Detalhes dos volumes de controle na região crítica do escoamento são mostrados para todas as malhas.

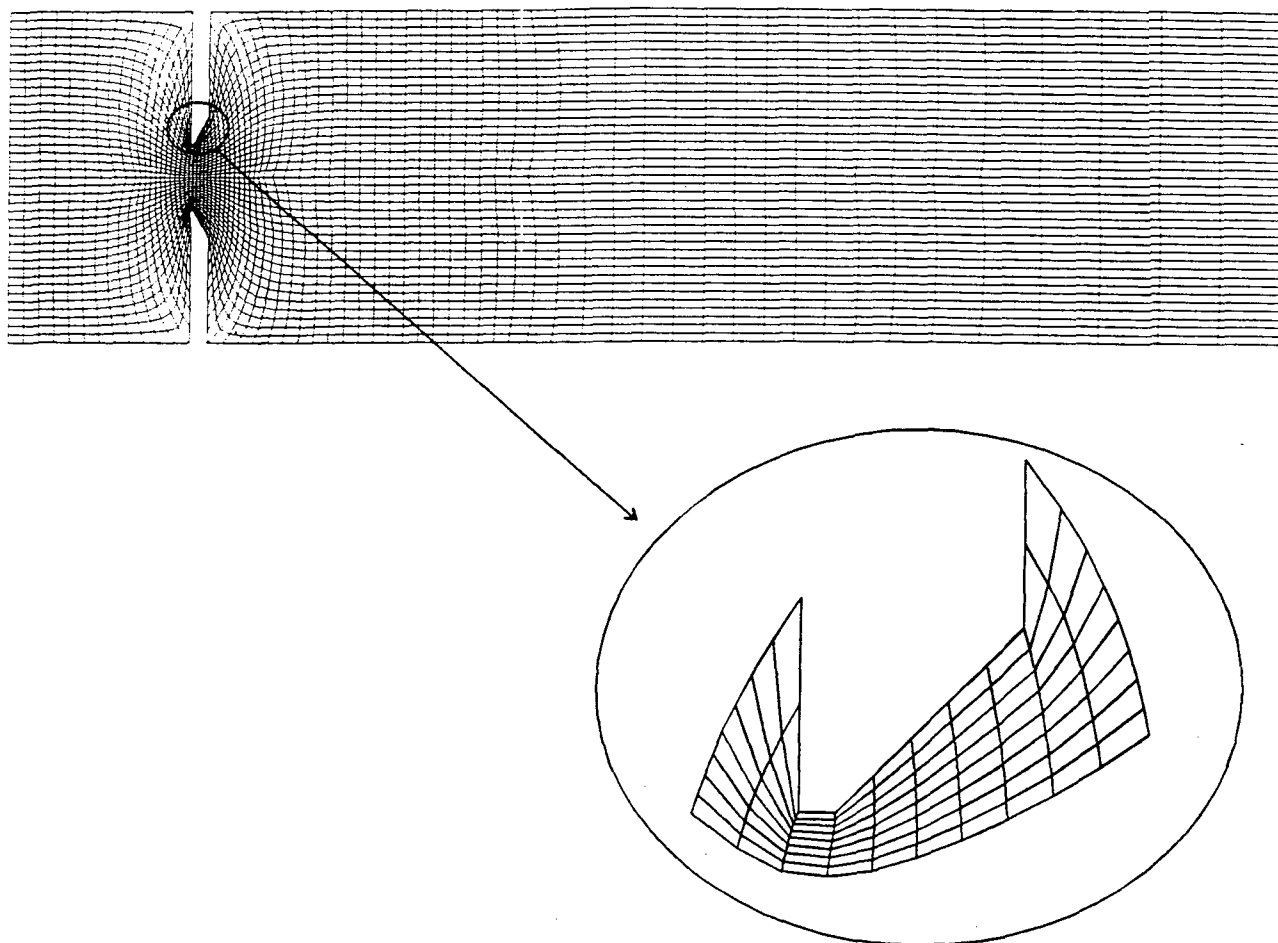


Fig. 5.2 - Malha 220 x 20 para a placa S4.

5.3 - TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES GOVERNANTES

5.3.1 - Introdução

Obtido o novo sistema de coordenadas, é necessário transformar as equações governantes do sistema cartesiano para o novo sistema. Todo o procedimento da transformação pode ser encontrado no trabalho de Maliska [52].

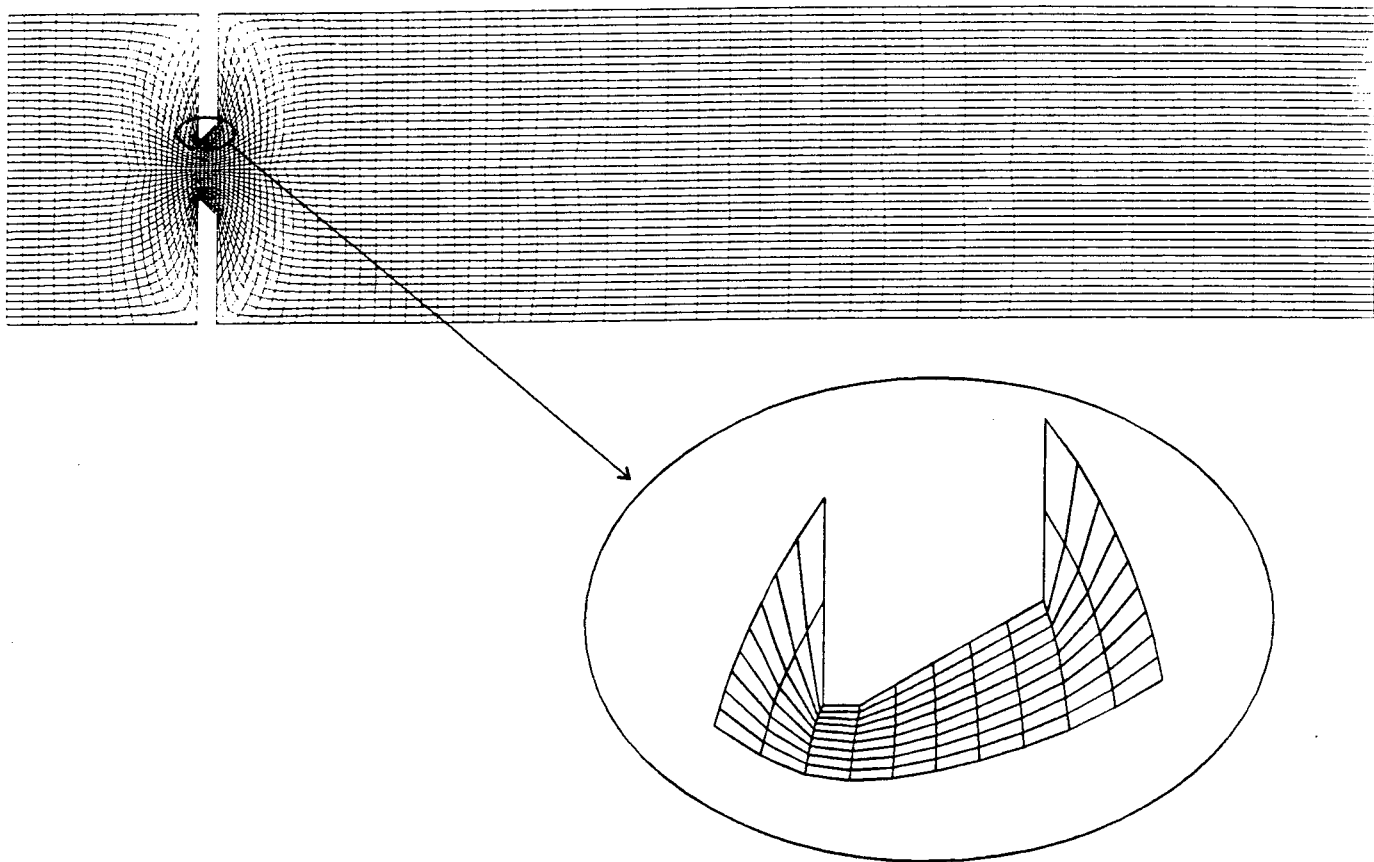


Fig. 5.3 - Malha 220 x 20 para a placa S3.

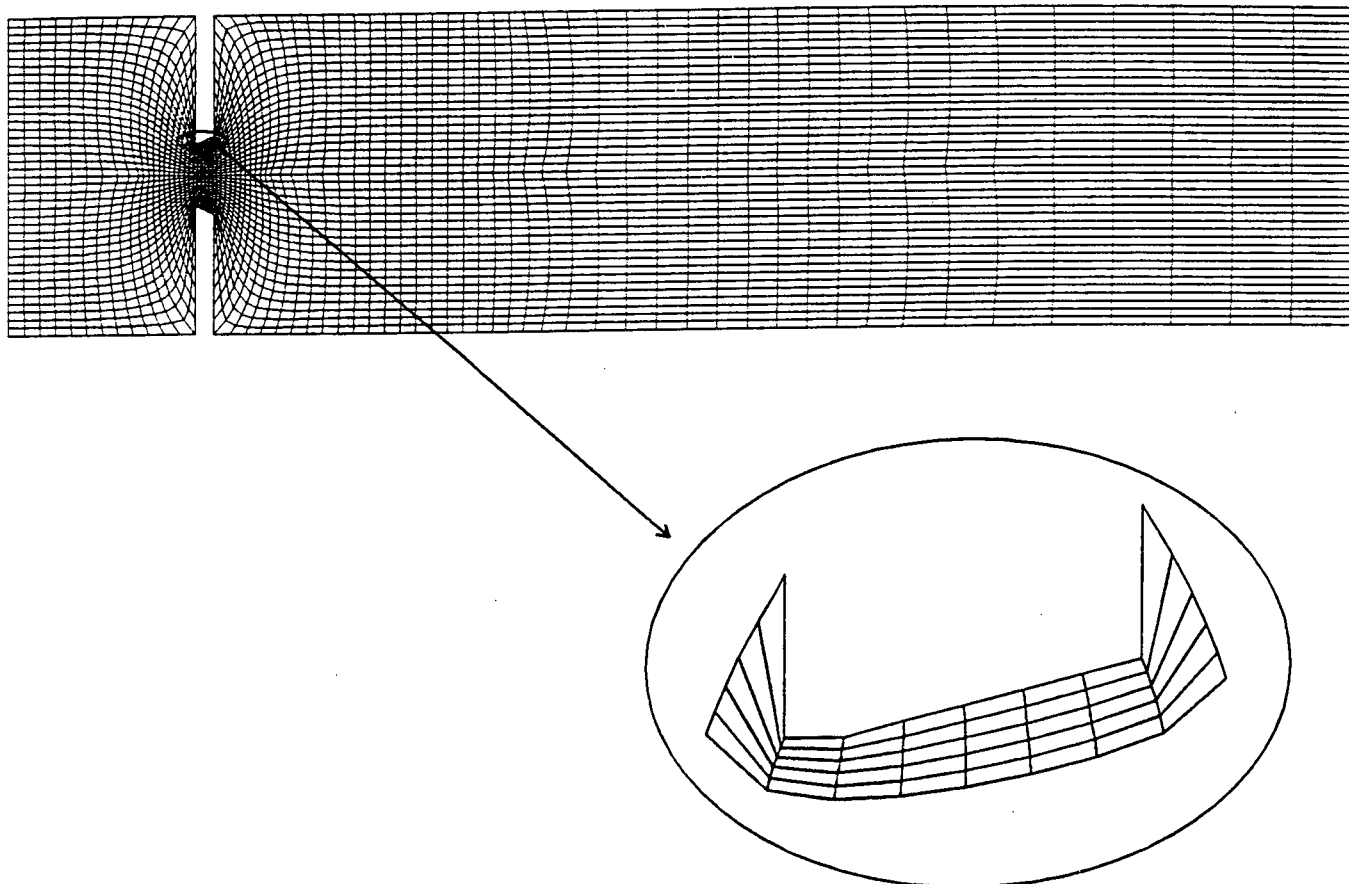


Fig. 5.4 - Malha 220 x 20 para a placa S2.

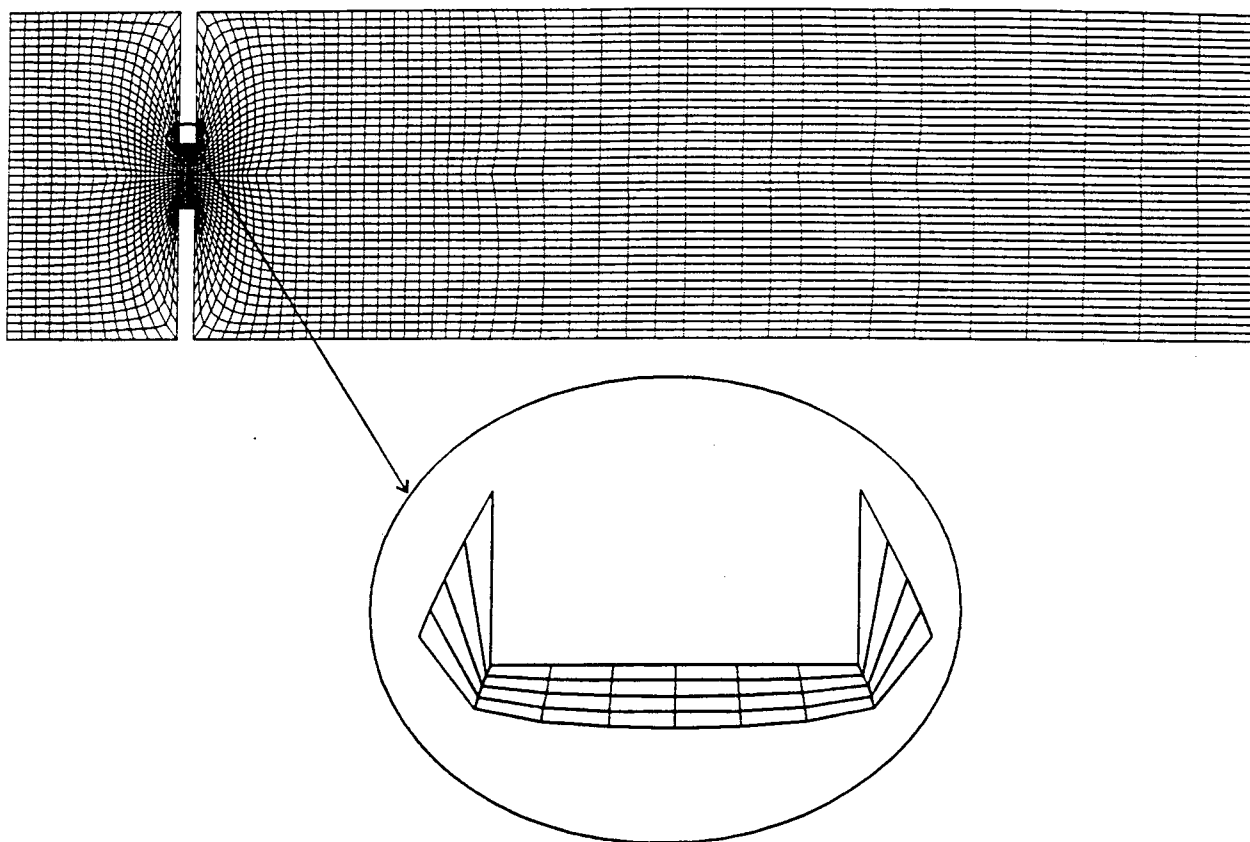


Fig. 5.5 - Malha 220 x 20 para a placa S1

Como é sabido, as componentes contravariantes do vetor velocidade estão relacionadas às componentes físicas normais às linhas coordenadas. Conforme mostrado em [52], com a decomposição de um vetor velocidade na direção normal, cada uma das componentes do vetor velocidade permite calcular a vazão mássica que atravessa cada uma das linhas coordenadas. Portanto, seria natural escolhê-las como variáveis dependentes no plano transformado. Esta escolha, entretanto, acarreta equações transformadas muito complexas, dificultando a interpretação física dos termos resultantes (Maliska [52]). Por este motivo as componentes do sistema de coordenadas cilíndricas são utilizadas como variáveis dependentes.

5.3.2 - Transformação da equação geral

Aplicando a transformação geral, como apresentado em [52], à equação genérica em coordenadas cilíndricas, Eq. (2.33), obtém-se a equação geral para um sistema curvilíneo generalizado.

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} [r \rho u \phi r_{\eta} - r \rho v \phi x_{\eta}] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} [r \rho v \phi r_{\xi} - r \rho u \phi r_{\xi}] + \frac{p^{\phi}}{J} = \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r J \Gamma^{\phi} (r_{\eta}^2 + x_{\eta}^2) \frac{\partial \phi}{\partial \phi} - r J \Gamma^{\phi} (r_{\eta} r_{\xi} + x_{\eta} x_{\xi}) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[-r J \Gamma^{\phi} (x_{\xi} x_{\eta} + r_{\xi} r_{\eta}) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + r J \Gamma^{\phi} (r_{\xi}^2 + r_{\eta}^2) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{S^{\phi}}{J} \quad (5.1)
 \end{aligned}$$

Aqui os sub-índices indicam as primeiras derivadas.

Definindo os coeficientes α , β , e γ como os coeficientes de acoplamento entre as equações (componentes do tensor métrica), U e V como as velocidades contravariantes sem normalização métrica e J como o jacobiano da transformação, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{J} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (r \rho U \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r \rho V \phi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(r J \Gamma^{\phi} \alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - (r J \Gamma^{\phi} \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(r J \Gamma^{\phi} \gamma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (r J \Gamma^{\phi} \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] - \frac{P^{\phi}}{J} + \frac{S^{\phi}}{J} \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

onde

$$\alpha = r_{\eta}^2 + x_{\eta}^2 \quad (5.3)$$

$$\gamma = x_{\xi}^2 + r_{\xi}^2 \quad (5.4)$$

$$\beta = x_{\xi} x_{\eta} + r_{\xi} r_{\eta} \quad (5.5)$$

$$U = r_{\eta} u - x_{\eta} v \quad (5.6)$$

$$V = x_{\xi} v - r_{\xi} u \quad (5.7)$$

$$J = (x_{\xi} r_{\eta} - x_{\eta} r_{\xi})^{-1} \quad (5.8)$$

Na obtenção da equação (5.2), foi considerado que $\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{J} \right] = 0$ que significa que a malha não se altera com o tempo (quando esta derivada é diferente de zero, a malha pode variar com o tempo, procedimento empregado em problemas que possuem malhas móveis com o tempo).

5.3.3 - Transformação dos termos fontes

Procedendo-se da mesma forma, para os termos fonte, obtém-se

a) P^{ϕ}

$$i) \phi = u \longrightarrow \frac{P^u}{J} = \frac{\partial P}{\partial \xi} r_{\eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} r_{\xi} \quad (5.9)$$

$$ii) \phi = v \longrightarrow \frac{P^v}{J} = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_{\xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_{\eta} \quad (5.10)$$

b) S^{ϕ} , para escoamento compressível

$$\hat{S}^u = \frac{\mu}{3} \left[Jr_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) + Jr_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) \right] \quad (5.11)$$

$$\hat{S}^v = \frac{\mu}{3} \left[Jx_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) + Jx_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{2\mu v}{Jr^2} \quad (5.12)$$

As expressões para os termos fontes e difusividades são dados na Tab. 5.1.

TABELA 5.1

Expressões para os termos fonte e difusividades da equação geral transformada

		P^{ϕ}/J		S^{ϕ}/J	
ϕ	Γ^{ϕ}	COMPRES/INCOMPRES	INCOMPRES.	COMPRES.	
1	0	0	0	0	
u	μ	$\frac{\partial P}{\partial \xi} r_{\eta} - \frac{\partial P}{\partial \eta} r_{\xi}$	0	$\frac{\mu}{3} \left[Jr_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) + Jr_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) \right]$	
v	μ	$\frac{\partial P}{\partial \eta} x_{\xi} - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_{\eta}$	$-\frac{2\mu v}{Jr^2}$	$\frac{\mu}{3} \left[Jx_{\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) + Jx_{\eta} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right) \right] - \frac{2\mu v}{2}$	

Detalhes da transformação da equação geral e dos termos fontes são dados no Apêndice A.

5.4 - OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS NO PLANO TRANSFORMADO

Esta metodologia consiste na integração das equações diferenciais transformadas sobre cada volume de controle do domínio físico, o que garante a conservação da variável integrada, tanto a nível global (domínio) como a nível elementar (volumes). Em seguida são feitas as aproximações numéricas, obtendo-se as equações algébricas para os volumes elementares e para um campo genérico ϕ . As condições de contorno ficarão incorporadas na medida em que forem realizados os balanços nos volumes elementares do contorno, de acordo com a condição de contorno existente na fronteira em questão. Nos próximos itens apresenta-se o processo de discretização das equações transformadas, a obtenção das equações para a pressão, o procedimento de solução das equações algébricas, o critério de convergência que será empregado, o esquema de armazenamento das variáveis e o esquema utilizado para aplicação das condições de contorno.

5.4.1 - Aproximação da equação geral

As equações diferenciais de conservação da massa e da quantidade de movimento em um sistema generalizado de coordenadas (ξ, η) são expressas genericamente pela Eq. (5.2), repetida abaixo, e pela Tab. 5.1.

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (r \rho U \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r \rho V \phi) = & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(r J \Gamma^\phi_\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - (r J \Gamma^\phi_\beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \\ & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(r J \Gamma^\phi_\gamma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (r J \Gamma^\phi_\beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] - \frac{P^\phi}{J} + \frac{S^\phi}{J} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Adotando-se uma formulação implícita, onde todos os termos são avaliados no instante $t + \Delta t$ e usando derivadas para trás para avaliar a

derivada temporal, a integração da Eq. (5.13) para um perímetro $2\pi r$, sobre o volume elementar da Fig. 5.6, resulta

$$\frac{(M_{p,p}\phi)^{n+1} - (M_{p,p}\phi)^n}{\Delta t} + \dot{M}_e\phi_e - \dot{M}_w\phi_w + \dot{M}_n\phi_n - \dot{M}_s\phi_s = \left[D_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + D_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_e - \left[D_1 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} + D_2 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} \right]_w + \left[D_3 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + D_4 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right]_n - \left[D_3 \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + D_4 \frac{\partial\phi}{\partial\xi} \right]_s + \frac{\hat{S}\phi}{\Delta t} - \frac{\hat{P}\phi}{\Delta t} \quad (5.14)$$

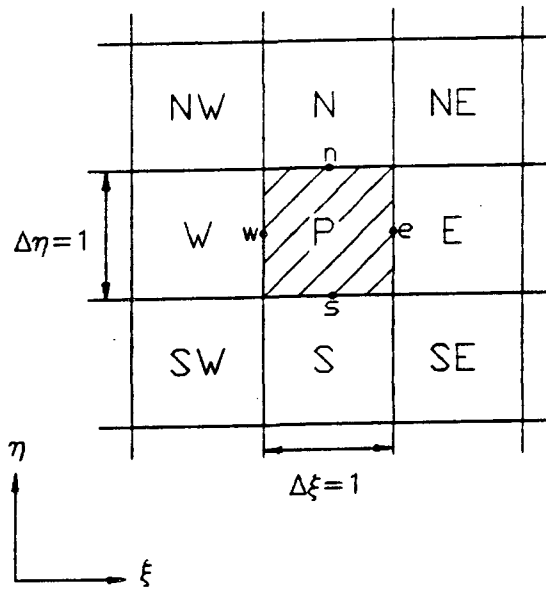


Fig. 5.6 - Volume de controle elementar e seus vizinhos no plano transformado

onde

$$\begin{aligned} D_1 &= \Gamma^\phi r \alpha J \Delta\eta \\ D_2 &= -\Gamma^\phi r \beta J \Delta\eta \\ D_3 &= \Gamma^\phi r \gamma J \Delta\xi \\ D_4 &= -\Gamma^\phi r \beta J \Delta\xi \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}
M_p &= \frac{\rho_p r \Delta \eta \Delta \xi}{J_p} \\
\dot{M}_e &= (\rho r U)_e \Delta \eta \\
\dot{M}_w &= (\rho r U)_w \Delta \eta \\
\dot{M}_n &= (\rho r V)_n \Delta \xi \\
\dot{M}_s &= (\rho r V)_s \Delta \xi \\
\hat{S}^\phi &= \frac{S^\phi}{J} \\
\hat{P}^\phi &= \frac{P^\phi}{J}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Utilizando-se funções de interpolação unidimensionais, "WUDS - Weight Upstream Differencing Scheme" (Raithby e Torrance [57]) para os termos convectivos e difusivos, dadas no apêndice B, obtém-se a equação final aproximada para ϕ

$$\begin{aligned}
A_p \phi_p &= A_e \phi_e + A_w \phi_w + A_n \phi_n + A_s \phi_s + A_{ne} \phi_{ne} + A_{se} \phi_{se} + A_{nw} \phi_{nw} + \\
&\quad A_{sw} \phi_{sw} + B^\phi
\end{aligned} \tag{5.17}$$

onde o termo fonte é dado por

$$B^\phi = \frac{(\dot{M}_p \phi_p)^0}{\Delta t} + L \left[\hat{S}^\phi - \hat{P}^\phi \right] r \Delta \xi \Delta \eta \tag{5.18}$$

e o termo $L \left[\hat{S}^\phi - \hat{P}^\phi \right]$ representa as aproximações numéricas dos termos \hat{S}^ϕ e \hat{P}^ϕ , desenvolvidos na próxima seção.

Os coeficientes são dados por

$$A_e = -\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \frac{(D_1)_e \bar{\beta}_e}{\Delta \xi} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \tag{5.19}$$

$$A_w = \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \frac{(D_1)_w \bar{\beta}_w}{\Delta \xi} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \tag{5.20}$$

$$A_n = -\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \frac{(D_3)_n \bar{\beta}_n}{\Delta\eta} + \frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} - \frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} \quad (5.21)$$

$$A_s = \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \frac{(D_3)_s \bar{\beta}_s}{\Delta\eta} - \frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} + \frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} \quad (5.22)$$

$$A_p = A_e + A_w + A_n + A_s + \frac{M_p}{\Delta t} \quad (5.23)$$

$$A_{ne} = \left[\frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta\xi} \right] \quad (5.24)$$

$$A_{se} = \left[-\frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta\xi} \right] \quad (5.25)$$

$$A_{nw} = \left[-\frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta\xi} \right] \quad (5.26)$$

$$A_{sw} = \left[\frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta\xi} \right] \quad (5.27)$$

$$A_{se} + A_{ne} + A_{nw} + A_{sw} = 0 \quad (5.28)$$

$$\bar{\alpha}_e = \frac{P_e^2}{(10 + 2P_e^2)} \quad (5.29)$$

$$\bar{\beta}_e = \frac{(1 + 0,005 P_e^2)}{(1 + 0,05 P_e^2)} \quad (5.30)$$

$$P_{ee} = \frac{\dot{M}_e}{\Gamma \phi J \alpha} \quad (5.31)$$

e da mesma forma para $\bar{\alpha}_w$, $\bar{\alpha}_n$, $\bar{\alpha}_s$, $\bar{\beta}_w$, $\bar{\beta}_n$, $\bar{\beta}_s$, P_{ew} , P_{en} , P_{es} . Os termos \dot{M}_e ,

$\dot{M}_w, \dot{M}_s, \dot{M}_n, D_1, D_2, D_3$ e D_4 são dados pelas Eqs. (5.16) e (5.16); U e V pelas Eqs. (5.6) e (5.7), respectivamente; α, β e γ pelas Eqs. (5.3) a (5.5) e J pela Eq. (5.8). Os termos $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ são coeficientes usados nas funções de interpolação.

5.4.2 - Equações aproximadas para os termos fontes

Seguindo a mesma metodologia utilizada para a equação geral, ou seja, integrando cada termo fonte no espaço e no tempo no perímetro $2\pi r$ e aproximando as derivadas por diferenças centrais, obtém-se

a) Para $L [\hat{P}^\phi]$ sobre os volumes elementares mostrados na Fig.

5.7, tem-se

$$L [\hat{P}^u] = \left[\frac{(P_E - P_P)}{\Delta \xi} r_\eta - \frac{(P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE})}{4\Delta \xi} r_\xi \right] \quad (5.32)$$

$$L [\hat{P}^v] = \left[\frac{(P_N - P_P)}{\Delta \eta} x_\xi - \frac{(P_{NE} + P_E - P_{NW} - P_W)}{4\Delta \xi} x_\eta \right] \quad (5.33)$$

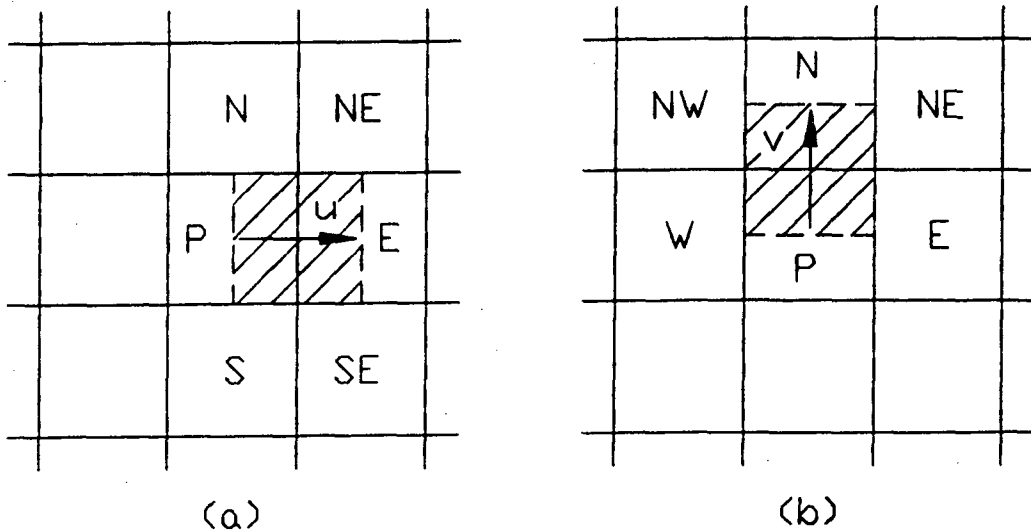


Fig. 5.7 - Volumes elementares para discretização dos termos fontes de \hat{P}^u e \hat{P}^v

b) Para $L[\hat{S}^\phi]$, utilizando derivadas centrais para os volumes de controle mostrados na Fig. 5.8, obtém-se

$$L[\hat{S}^u] = \frac{\mu}{3} \left\{ \frac{r_\eta}{\Delta\xi} \left[(\nabla \cdot \vec{v})_e - (\nabla \cdot \vec{v})_w \right] - \frac{r_\xi}{\Delta\eta} \left[(\nabla \cdot v)_n - (\nabla \cdot \vec{v})_s \right] \right\} \quad (5.34)$$

onde

$$(\nabla \cdot \vec{v})_e = J_e \left[\frac{U_E - U_P}{\Delta\xi} + \frac{V_E - V_{SE}}{\Delta\eta} \right] + \frac{V_E + V_{SE}}{2 r_e} \quad (5.35)$$

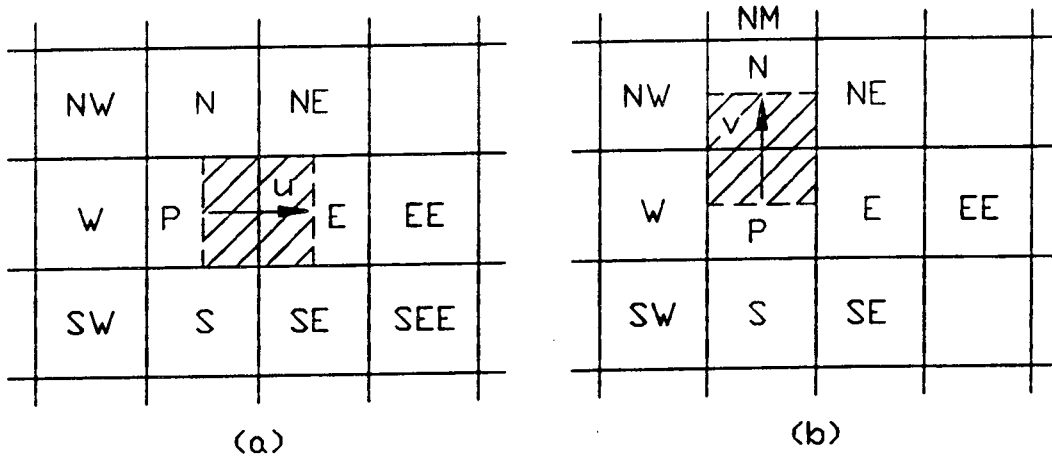


Fig. 5.8 - Volumes elementares para discretização dos termos fontes de S, para u e v.

$$(\nabla \cdot \vec{v})_w = J_w \left[\left(\frac{U_P - U_W}{\Delta\xi} \right) + \left(\frac{V_P - V_S}{\Delta\eta} \right) \right] + \frac{V_P + V_S}{2 r_w} \quad (5.36)$$

$$(\nabla \cdot \vec{v})_n = J_n \left[\frac{U_{NE} + U_E - U_{NW} - U_W}{4\Delta\xi} + \frac{V_N + V_{NE} - V_S - V_{SE}}{4\Delta\eta} \right] + \frac{V_P + V_E}{2 r_n} \quad (5.37)$$

$$(\nabla \cdot \vec{v})_s = J_s \left[\frac{U_E + U_{SE} - U_W - U_{SW}}{4\Delta\xi} + \frac{V_E + V_P - V_{SSE} - V_{SS}}{4\Delta\eta} \right] + \frac{V_S + V_{SE}}{2 r_s} \quad (5.38)$$

$$L[\hat{S}^v] = \frac{\mu}{3} \left\{ \left[(\nabla \cdot \vec{v})_n - (\nabla \cdot \vec{v})_s \right] \frac{x_\xi}{\Delta\eta} - \left[(\nabla \cdot \vec{v})_e - (\nabla \cdot \vec{v})_w \right] \frac{x_\eta}{\Delta\xi} - \frac{\mu v_p}{J_p r_p^2} \right\} \quad (5.39)$$

onde

$$(\nabla \cdot \vec{V})_n = J_n \left[\frac{U_n - U_{NW}}{\Delta \xi} + \frac{V_N - V_P}{\Delta \eta} \right] + \frac{V_N + V_P}{2 r_n} \quad (5.40)$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_s = J_s \left[\frac{U_P - U_W}{\Delta \xi} + \frac{V_P - V_S}{\Delta \eta} \right] + \frac{V_P + V_S}{2 r_s} \quad (5.41)$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_e = J_e \left[\frac{U_{NE} + U_E - U_{NW} - U_W}{4 \Delta \xi} + \frac{V_N + V_{NE} - V_S - V_{SE}}{4 \Delta \eta} \right] + \frac{V_P + V_E}{2 r_e} \quad (5.42)$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_w = J_w \left[\frac{U_N + U_P - U_{NW} - U_W}{4 \Delta \xi} + \frac{V_{NW} + V_N - V_S - V_{SW}}{4 \Delta \eta} \right] + \frac{V_W + V_P}{2 r_w} \quad (5.43)$$

Detalhes da obtenção das equações aproximadas são dados no Apêndice B, seguindo o procedimento de Maliska [52].

5.5 - OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DE ESTADO PARA O FLUIDO DE TRABALHO NO MODELO COMPRESSÍVEL.

A variação da massa específica com a pressão e temperatura são descritas por equações de estado. No entanto, para líquidos, a equação de estado não pode ser derivada matematicamente. Entretanto, como tais variações são pequenas, uma expressão suficientemente precisa pode ser obtida pela diferenciação da relação $\rho = \rho(P, T)$, (Meritt [04] e Negri [58]), como

$$d\rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T dP + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P dT \quad (5.44)$$

Com relação ao estado inicial, esta expressão pode ser integrada para obter-se

$$\rho - \rho_o = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_T (P - P_o) + \left. \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P (T - T_o) \quad (5.45)$$

Como ρ = massa/volume, as derivadas parciais podem ser rearranjadas de forma conveniente, obtendo-se

$$\rho = \rho_o \left[1 + \frac{1}{\beta} (P - P_o) - \gamma (T - T_o) \right] \quad (5.46)$$

onde

$$\frac{1}{\beta} = K = - \left. \frac{1}{V_o} \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T = \frac{1}{\rho_o} \left. \left(\frac{\partial \rho}{\partial P} \right) \right|_T \quad (5.47)$$

e

$$\beta = - V_o \left. \frac{\partial P}{\partial V_t} \right|_T \quad (5.48)$$

Aqui, K representa a compressibilidade do fluido e β é o coeficiente de compressibilidade. O coeficiente de compressibilidade isotérmico é a propriedade mais importante na determinação do comportamento dinâmico de sistemas hidráulicos, por estar relacionado à "rigidez" do fluido.

Por outro lado,

$$\gamma = \left. \frac{1}{V_o} \frac{\partial V_t}{\partial T} \right|_P \quad (5.49)$$

onde

γ = coeficiente de expansão volumétrico;

V_o = volume inicial, (m^3);

V = volume total do fluido, (m^3).

No presente trabalho, pelas hipóteses já consideradas anteriormente, $T = T_o = \text{constante}$. Desta forma, a Eq. (5.46), torna-se

$$\rho = \rho_o \left[1 + \frac{1}{\beta} (P - P_o) \right] \quad (5.50)$$

onde

ρ_o = valor inicial da massa específica, (kg/m³);

P_o = valor inicial da pressão (Pa);

β = valor medido experimentalmente.

A Eq. (5.50) pode ser escrita de maneira a permitir uma linearização da forma $\rho = C^P P + b^P$. Assim procedendo, tem-se

$$\rho = \rho_o \left[1 - \frac{P_o}{\beta} \right] + \frac{\rho_o}{\beta} P \quad (5.51)$$

onde, para β constante, obtém-se

$$C^P = \frac{\rho_o}{\beta} \quad (5.52)$$

e

$$b^P = \rho_o \left[1 - \frac{P_o}{\beta} \right] \quad (5.53)$$

Considerando β como sendo uma função da pressão, do tipo $\beta = gp + h$, os coeficientes C^P e b^P podem ser obtidos pelas seguintes expressões

$$C^P = \frac{\rho_o}{gp + h} \quad (5.54)$$

$$b^P = \rho_o \left[1 - \frac{P_o}{gp + h} \right] \quad (5.55)$$

onde g e h são obtidos a partir de dados experimentais.

5.6 - MÉTODO PARA TRATAMENTO DO ACOPLAMENTO PRESSÃO-VELOCIDADE E OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA PRESSÃO

A seção anterior mostra a obtenção da equação aproximada para uma variável genérica ϕ que, no nosso caso, é u e v . Como o escoamento em estudo é resolvido considerando-o compressível e incompressível, uma metodologia adequada deve ser empregada. Far-se-á uso da formulação compressível-incompressível, da forma descrita por Silva e Maliska [59], Maliska [52] e Silva [53], onde o método SIMPLEC é usado para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade.

Assim, através do mesmo processo de linearização da equação de estado e seguindo a metodologia de Silva [53] e Silva e Maliska [59], obtém-se a equação para P'

$$a_P P'_P = \sum_{nb} a'_{nb} P'_{nb} + b^{P'} \quad (S.56)$$

onde

$$\sum_{nb} a'_{nb} P'_{nb} + b^{P'} = a'_e P'_E + a'_w P'_W + a'_n P'_N + a'_s P'_S + a'_{ne} P'_{NE} + a'_{nw} P'_{NW} + a'_{se} P'_{SE} + a'_{sw} P'_{SW} + b^{P'} \quad (5.57)$$

O procedimento para a obtenção da Eq. 5.56 é mostrado no apêndice C, onde os coeficientes e o termo fonte $b^{P'}$ são dados por

$$\begin{aligned}
a_p &= m_p^\rho C_p^\rho + m_e^U d_p^{-u} \alpha_{p_u} - m_w^U d_w^{-u} \alpha_{w_u} + m_n^V d_p^{-v} \gamma_{p_v} - m_s^V d_s^{-v} \gamma_{s_v} \\
a_e &= -m_e^\rho C_E^\rho + m_e^U d_p^{-u} \alpha_{p_u} - m_n^V d_p^{-v} \beta_{p_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} - m_s^V d_s^{-v} \beta_{s_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} \\
a_w &= -m_w^\rho C_W^\rho - m_w^U d_w^{-u} \alpha_{w_u} + m_n^V d_p^{-v} \beta_{p_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} + m_s^V d_s^{-v} \beta_{s_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} \\
a_n &= -m_n^\rho C_N^\rho + m_n^V d_p^{-v} \gamma_{p_v} - m_e^U d_p^{-u} \beta_{p_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} - m_w^U d_w^{-u} \beta_{w_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} \\
a_s &= -m_s^\rho C_S^\rho - m_s^V d_s^{-v} \gamma_{s_v} + m_e^U d_p^{-u} \beta_{p_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} + m_w^U d_w^{-u} \beta_{w_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} \\
a_{ne} &= -m_e^U d_p^{-u} \beta_{p_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} - m_n^V d_p^{-v} \beta_{p_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} \\
a_{sw} &= m_w^U d_w^{-u} \beta_{w_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} + m_s^V d_s^{-v} \beta_{s_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} \\
a_{nw} &= -m_w^U d_w^{-u} \beta_{w_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} + m_n^V d_p^{-v} \beta_{p_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi} \\
a_{se} &= m_e^U d_p^{-u} \beta_{p_u} \frac{\Delta\xi}{4\Delta\eta} - m_s^V d_s^{-v} \beta_{s_v} \frac{\Delta\eta}{4\Delta\xi}
\end{aligned} \tag{5.58}$$

$$b^p = \frac{r \dot{\rho}_p \Delta\xi \Delta\eta}{J \Delta t} - m_p^\rho \rho_p^* - m_e^\rho \rho_E^* - m_w^\rho \rho_W^* - m_n^\rho \rho_N^* - m_s^\rho \rho_S^* \tag{5.59}$$

$$\bar{d}_p^u = \frac{r_e}{a_p^u - \sum a_{nb}^u} \tag{5.60}$$

$$\bar{d}_p^v = \frac{r_n}{a_p^v - \sum a_{nb}^v} \tag{5.61}$$

Obtida P' , pela Eq. (5.56), a pressão é corrigida da seguinte forma

$$P = P^* + P' \quad (5.62)$$

Assim, o método SIMPLEC, da mesma forma que o SIMPLE, consiste de dois passos básicos: primeiro calcula-se P' através da Eq. (5.56) e corrige-se a velocidade tal que a conservação da massa seja satisfeita. Depois faz-se a correção da pressão, através da Eq. (5.62), seguindo o seguinte algoritmo de solução:

- a) Estima-se o campo de velocidades, $u^*(\xi, \eta)$, $v^*(\xi, \eta)$, e da pressão $P^*(\xi, \eta)$;
- b) com o campo de velocidades estimado calculam-se os coeficientes para $u^*(\xi, \eta)$ e $v^*(\xi, \eta)$;
- c) com o campo de pressões estimado resolve-se a equação do movimento e determina-se $u^*(\xi, \eta)$ e $v^*(\xi, \eta)$ que não satisfazem a equação da conservação da massa;
- d) calculam-se os coeficientes e o termo fonte da equação de P' e determina-se P' pela Eq. (5.56);
- e) corrige-se $u^*(\xi, \eta)$ e $v^*(\xi, \eta)$ obtendo-se o campo de velocidades que satisfaz a equação da conservação da massa, através de equações do tipo $u_p = u_p - d_p^{-u} L [P'^u] \Delta \xi$;
- f) corrige-se P através da Eq. (5.62);
- g) faz-se $P^* = P$, volta-se ao item b e itera-se até convergência.

Maiores detalhes na obtenção da Eq. (5.56) são dados no Apêndice C ou em Maliska [52] e Silva [53].

5.7 - ARRANJO DOS VOLUMES DE CONTROLE E ARMAZENAMENTO DAS VARIÁVEIS

A Fig. 5.9 mostra a posição em que são armazenadas as variáveis para um volume de controle P . A pressão fica no centro do volume. Na face leste tem-se a componente contravariante U da velocidade e as componentes cartesianas necessárias para seu cálculo. Na face norte armazenam-se a componente contravariante, V , da velocidade e as componentes cartesianas necessárias para seu cálculo.

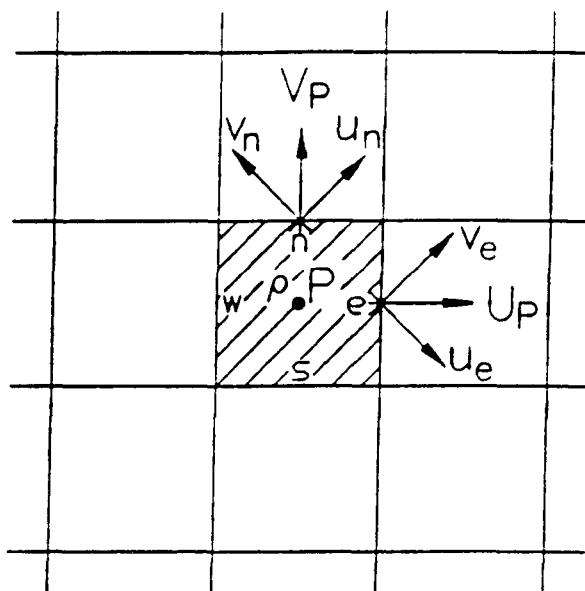


Fig. 5.9 - Esquema de armazenamento das variáveis.

5.8 - APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO

Depois da obtenção das equações aproximadas que governam o escoamento, para completar a solução do problema é necessário especificar as condições de contorno e implementá-las de forma discretizada no plano transformado. Este processo de aplicação das condições de contorno está ligado à localização das variáveis na malha, as quais podem estar ou não sobre as

Na fronteira de entrada, ou fronteira oeste, especifica-se $v=0$ e $u=u(r,t)$. A partir da velocidade $u(r,t)$ calculam-se as componentes contravariantes, obtendo-se, (ver Fig. 5.11).

$$v_w = -v_p$$

$$u_w = u(r,t)$$

$$U_w = r_\eta u(r,t)$$

Aqui $u(r,t)$ é a velocidade média obtida a partir da integração das vazões determinadas experimentalmente, ou através do modelo analítico.

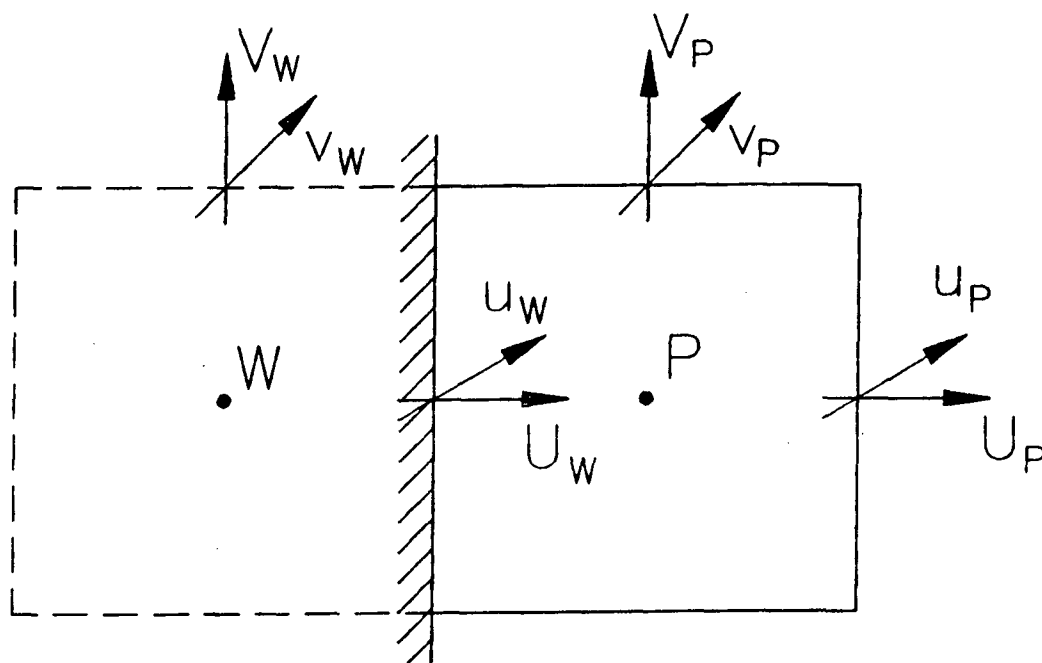


Fig. 5.11 - Volume representando a fronteira de entrada.

Na fronteira de saída, fronteira leste, e na fronteira de simetria, fronteira sul, as componentes cartesianas u e v são igualadas às componentes correspondentes do volume anterior. Com as componentes cartesianas calculam-se as componentes contravariantes, ou seja (ver Fig. 5.12).

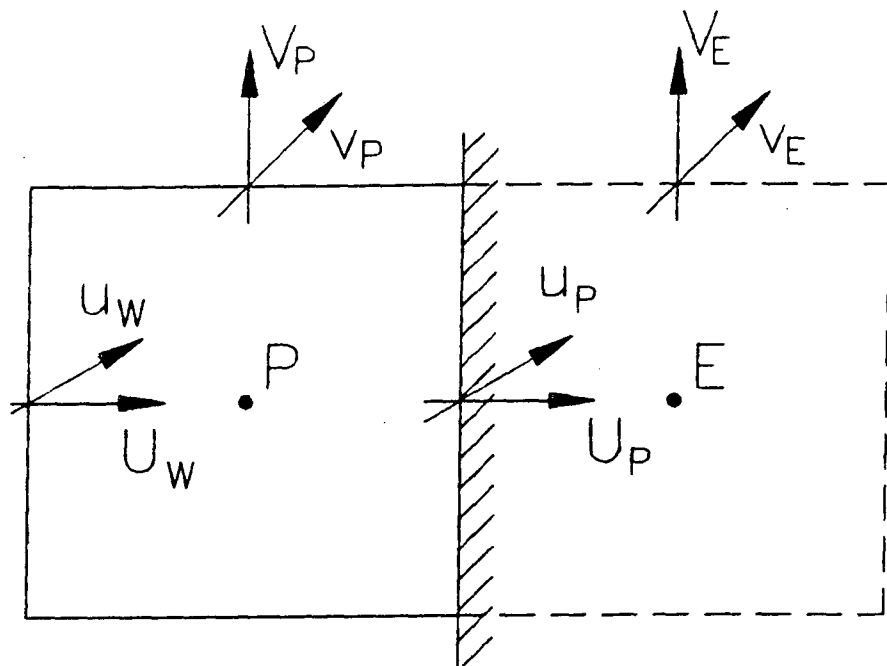


Fig. 5.12 - Volume representando a fronteira de saída.

$$u_P = u_W$$

$$v_P = v_E$$

$$U_P = r_\eta u_P - \chi_\eta v_P$$

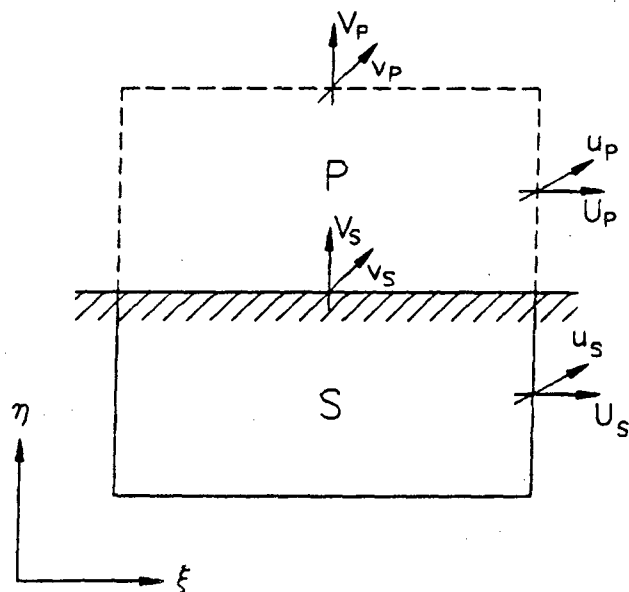


Fig. 5.13 - Volume representando a fronteira de simetria.

Fronteira sul: $u_S = u_P$ (ver Fig. 5.13)

$$v_S = 0$$

$$V_S = x_\xi v_S - r_\xi u_S = 0$$

5.9 - PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Para a elaboração do programa computacional é utilizada a estrutura de um dos programas desenvolvido pelo SINMEC e consta do seguinte procedimento de solução (Silva [53]):

- 1) Geração da malha, cálculo e armazenamento das métricas e do raio.
 - 2) Conhecidos no instante t os campos u^o , v^o , P^o e ρ^o , são estimados os campos u , v , P e p em $t + \Delta t$.
 - 3) São calculadas as velocidades contravariantes U e V
 - 4) Com os campos de ρ , U e V disponíveis são calculados os coeficientes das equações da quantidade de movimento na direção x e r .
 - 5) São calculados os valores de d^{-u} e d^{-v} .
 - 6) São calculados os coeficientes da equação para P' .
 - 7) Com o campo de pressões, P' , são calculados os termos fonte $L[\hat{P}^u]$ e $L[\hat{P}^v]$.
 - 8) São resolvidas as equações da quantidade de movimento em x e r e determinados novos campos de velocidades u^* e v^* (que não satisfazem a equação da conservação da massa).
 - 9) Com base nos campos u^* e v^* são calculadas as velocidades U^* e V^* pelo mesmo processo descrito em (3).
 - 10) É calculado o termo fonte da equação de P' .
 - 11) Resolve-se a equação de P' corrigindo o campo de pressões que conservam a massa e as velocidades U e V .
 - 12) A partir das velocidades contravariantes, U e V , corrigidas, que conservam a massa, são calculadas as velocidades cartesianas.
 - 13) Retorna-se ao item 7 e itera-se até convergência
- Até aqui são obtidos os campos de u , v e P para um determinado conjunto de coeficientes da equação da conservação da massa (equação para P').

14) Retorna-se ao item (6) e itera-se até a convergência.

Até aqui são conhecidos os campos de u , v e P para um determinado conjunto de coeficientes das equações da conservação da quantidade de movimento.

15) Retorna-se ao item (4) e itera-se até a convergência. Desta forma serão obtidos os campos de u , v , P e ρ que satisfazem as equações da conservação da quantidade de movimento e da massa em $t+\Delta t$. Considera-se a solução obtida em (15) como um campo inicial e repete-se o procedimento até que o critério de convergência estipulado seja satisfeito. Como critério de convergência utilizou-se a variação do gradiente de pressão na placa. Testes para vários fatores de convergência foram utilizados para garantir a qualidade dos resultados.

O método MSI (Modified Strongly Implicit Procedure), foi utilizado para a solução dos sistemas de equações algébricas (Schneider e Zedan [61]).

6 - VALIDAÇÃO NUMÉRICA DO PROGRAMA COMPUTACIONAL

Existem dois níveis de possibilidade de erros na solução numérica quando os resultados são comparados com a realidade de um problema físico. Do ponto de vista numérico os resultados devem ser comparados com outras soluções, analíticas ou numéricas, para verificar se as equações diferenciais foram corretamente resolvidas. Aspectos como precisão da solução e convergência do algoritmo são testados nesta fase, que pode ser chamada de validação numérica. Este processo atesta a qualidade da metodologia numérica (Maliska [52]). A validação física, por outro lado, está preocupada com a fidelidade do modelo matemático para com o problema físico em questão. Na visão da Engenharia este é o ponto que interessa.

No caso do escoamento pulsante estudado, devido à dificuldade de se obterem soluções analíticas e à falta de dados na literatura consultada, uma outra alternativa para a validação numérica do programa transiente foi empregada. Neste caso, a solução de um problema com características físicas semelhantes e com solução analítica conhecida é utilizada para validação numérica do programa computacional. Para o regime permanente existem dados e soluções analíticas que permitem uma validação numérica bastante geral.

6.1 - VALIDAÇÃO NUMÉRICA PARA O REGIME PERMANENTE

Para validar o modelo numérico e garantir a correta implementação do programa computacional em regime permanente foi realizada uma série de testes, resolvendo-se problemas mais simples de escoamentos com solução analítica (placa plana, duto circular, etc.). Nestes problemas perfis e

variações locais foram comparadas. No entanto, neste trabalho apresentam-se apenas comparações de parâmetros globais, tais como coeficientes de vazão, com os obtidos numericamente ou experimentalmente por outros autores e pelo próprio autor.

Neste caso, para a placa com relação de diâmetro de 0,2 e ângulo de chanfro de 45° (placa S4), os coeficientes de vazão são comparados com os obtidos numericamente por Nigro [14] e com os obtidos experimentalmente por Tuve and Sprenkle [11]. Estes resultados são mostrados na Fig. 6.1 em função da raiz quadrada do número de Reynolds. Aqui o número de Reynolds utilizado é o baseado no diâmetro do orifício. Nota-se que para esta faixa de número de Reynolds, os resultados obtidos aproximam-se bem dos valores obtidos pelos outros autores.

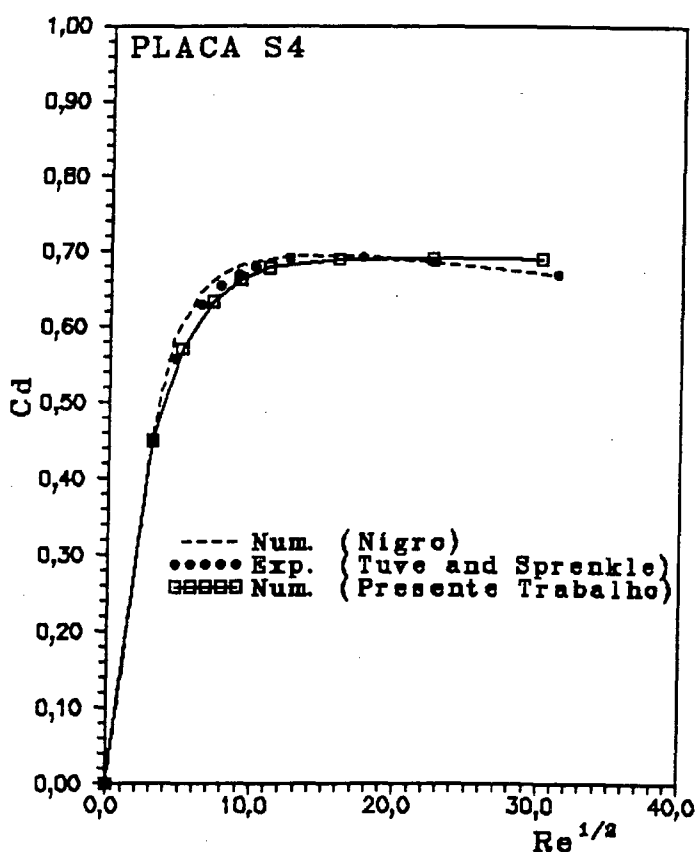


Fig. 6.1 - Variação do coeficiente de vazão em placas de orifício com a raiz quadrada do número de Reynolds.

Os valores dos coeficientes de vazão obtidos experimentalmente no presente trabalho, para a mesma placa, são mostrados na Fig. 6.2. Nota-se que os coeficientes numéricos aproximam-se bem dos obtidos experimentalmente. A Fig. 6.2 mostra também que para esta faixa de número de Reynolds a consideração de escoamento compressível ou incompressível leva praticamente aos mesmos valores dos coeficientes de vazão.

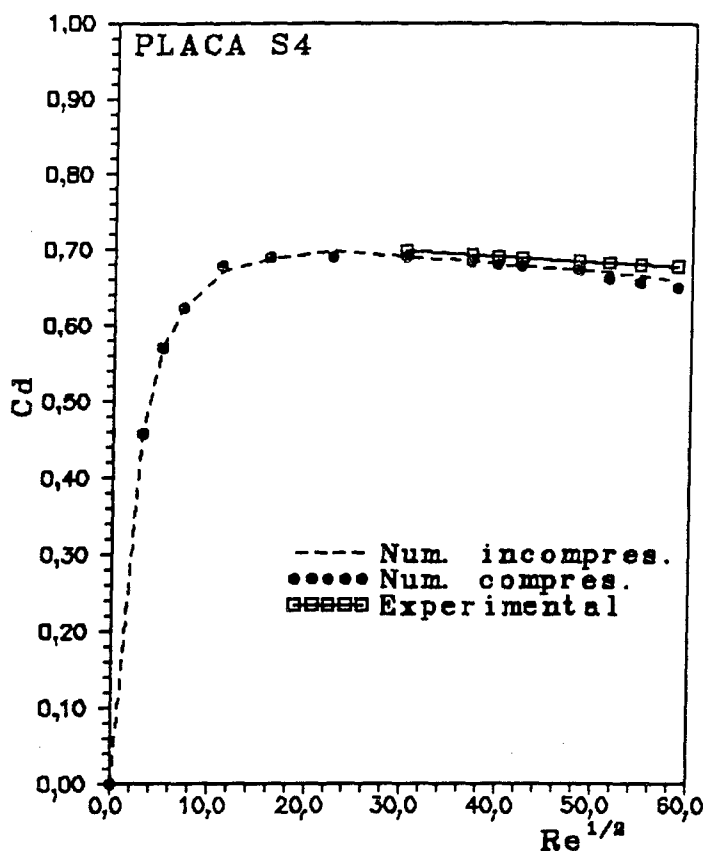


Fig. 6.2 - Comparação dos coeficientes de vazão numéricos com os obtidos experimentalmente.

A comparação dos coeficientes de vazão obtidos numericamente para o escoamento em regime permanente, dentro da faixa de Re utilizada ($0 \leq Re \leq 3500$), mostrou uma boa concordância com os obtidos numericamente por Nigro [14] e experimentalmente por Tuve and Sprengle [11]. Ao mesmo tempo, os resultados numéricos aproximaram-se bem dos resultados experimentais, ambos obtidos no presente trabalho.

6.2 - VALIDAÇÃO NUMÉRICA DO PROGRAMA TRANSIENTE

Para escoamentos transientes, como o escoamento pulsante em placas de orifício, não é fácil obter-se soluções analíticas. Uma alternativa para a validação numérica do programa computacional transiente é a solução de um problema com características físicas semelhantes ao escoamento em questão. A solução analítica de um escoamento oscilatório estudado por Schlichting [65], parece adequada para validar a presente metodologia numérica. Trata-se do escoamento de um fluido através de um duto sob a influência de um gradiente de pressão periódico, produzido pelo movimento alternativo de um êmbolo. Este escoamento corresponde ao mesmo escoamento em estudo, sem a restrição imposta pela placa e supondo que o duto é suficientemente longo para considerar o escoamento variando apenas em r . Nestas condições, a equação de Navier-Stokes assume a forma (Schlichting [65])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right] \quad (6.1)$$

cujas condições de contorno são $u = 0$ em $r = R$ (não deslizamento). O gradiente de pressão causado pelo movimento do pistão é harmônico e é dado por

$$- \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = k_0 \cos \omega t \quad (6.2)$$

onde k_0 é uma constante e ω é a frequência angular do sistema. Aqui, ωt representa o ângulo do excêntrico do pistão.

Usando notação complexa, assumindo a velocidade como sendo uma função da forma $u(r, t) = f(r) e^{i\omega t}$ e aplicando funções de Bessel, obtém-se a solução da Eq. (6.1), dada por Schlichting [65],

$$u(r,t) = \frac{k_0}{\omega} \left\{ \sin \omega t - \sqrt{\frac{R}{r}} \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (R - r) \right] \times \right. \\ \left. \sin \left[\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (R - r) \right] \right\} \quad (6.3)$$

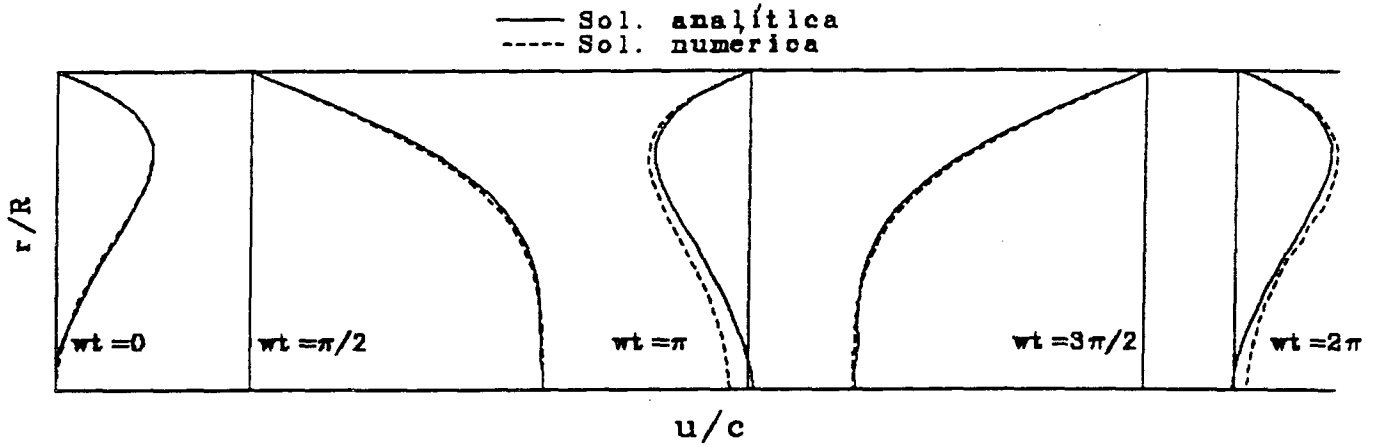


Fig. 6.3 - Perfis de velocidade para uma frequência de 0,815 Hz.

Aqui, o segundo termo da Eq. (6.3) tende a zero à medida que a distância da parede $(R - r)$ aumenta, sempre que $\sqrt{\frac{\omega}{\nu}} R$ seja grande. Consequentemente, a uma distância grande da parede, somente o primeiro termo é importante. Desta forma, a solução analítica tem a forma típica de uma camada

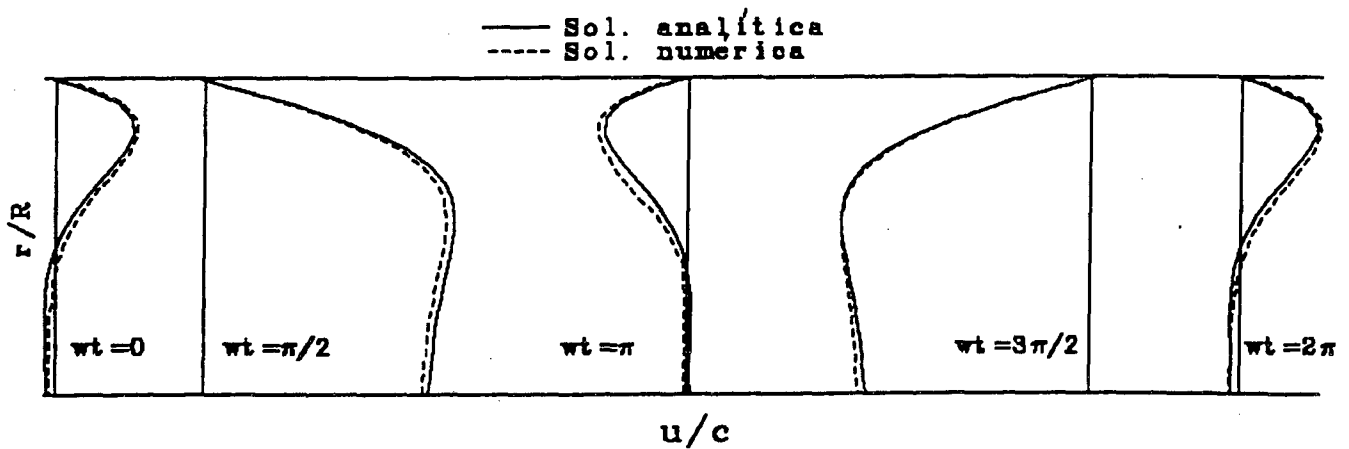


Fig. 6.4 - Perfis de velocidade para uma frequência de 2,0 Hz.

limite, onde a uma distância grande da parede (perto do centro do duto) o fluido se movimenta como se não tivesse fricção. As Figs. 6.3 a 6.6 representam os perfis de velocidade para frequências de 0,815, 2, 6 e 10 Hz, respectivamente, em diferentes instantes de um período. Aqui c é uma constante relacionada à frequência angular ω e é utilizada para adimensionalizar a velocidade (Schlichting [65]).

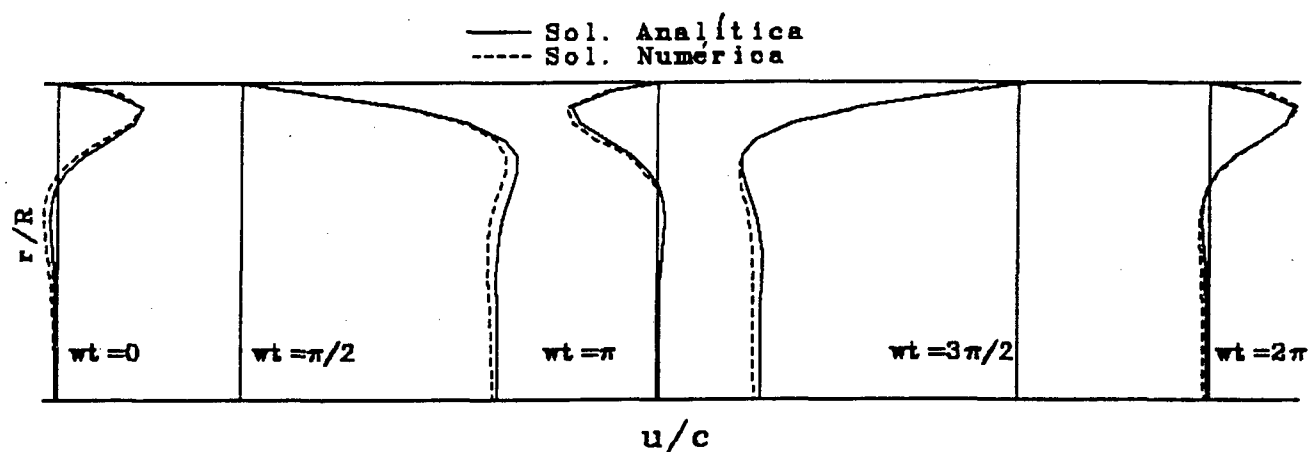


Fig. 6.5 - Perfis de velocidade para uma frequência de 6,0 Hz.

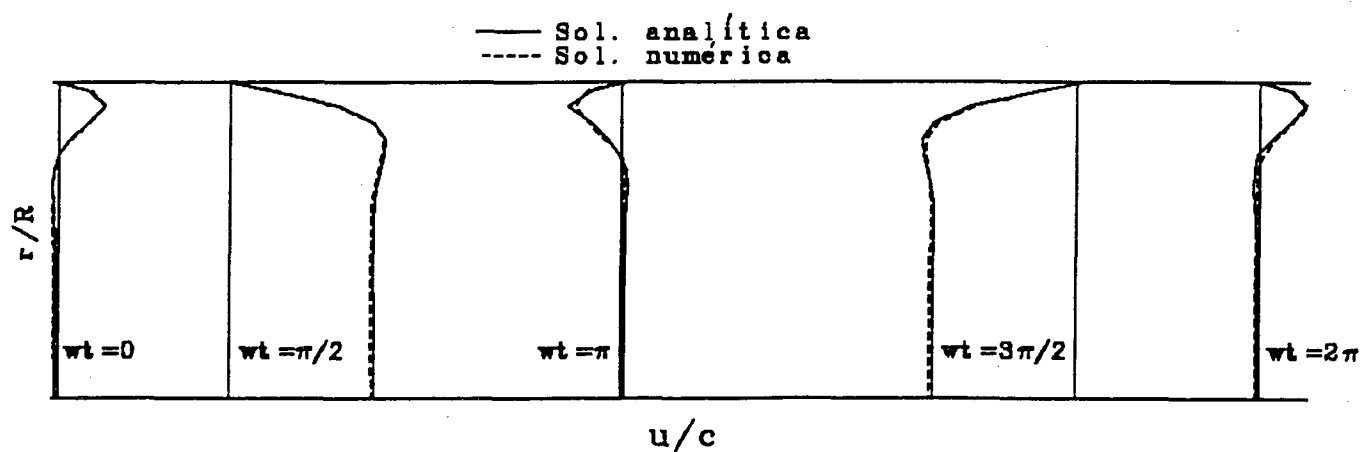


Fig. 6.6 - Perfis de velocidade para uma frequência de 10,0 Hz.

A solução numérica do escoamento pulsante dado pela Eq. (6.1), foi obtida após um rigoroso teste de malha no espaço e no tempo. Desta forma os perfis de velocidade obtidos numericamente representam a melhor aproximação da solução analítica, mesmo que pequenas discrepâncias ocorram em alguns instantes do período. De uma maneira geral, pode-se notar que a solução numérica aproxima-se bem da solução analítica para a faixa de frequências utilizada no presente trabalho. Desta forma deve-se esperar que a solução numérica possa representar bem as variações temporais do escoamento, mesmo que uma restrição seja acrescentada.

Concluída a etapa de validação numérica da metodologia, prossegue-se agora à validação física, na qual são apresentados e comparados os principais resultados obtidos nas diferentes metodologias.

$Ra_a(t)$, a fase, θ_a , e as vazões dinâmicas na placa, $Q_{ta}(t)$. A comparação destes três parâmetros com os obtidos experimentalmente validam o modelo analítico. Note que tanto $Q_{ta}(t)$ como $Q_{te}(t)$ podem ser usadas como condição de contorno no modelo numérico. No entanto, uma vez validado o modelo numérico com os dados experimentais, as discrepâncias nos resultados numéricos deverão ser devidas à condição de contorno utilizada. Desta forma, a questão mais importante aqui é a comparação de $Q_{ta}(t)$ com $Q_{te}(t)$, a qual indicará o quanto as duas condições de contorno diferem em amplitude e fase.

7.2 - RESULTADOS PARA O REGIME PERMANENTE

Antes de apresentar os resultados para o regime transiente, são analisados os principais parâmetros obtidos no regime permanente, para as placas cujas dimensões são descritas na Tab. 3.3. Estas placas, indicadas por E1, S1, S2, S3 e S4, têm relações de diâmetros de 0,2, mas ângulos e geometrias diferentes. A placa E1 tem a entrada cônica com ângulo de 45° , enquanto que as placas S1, S2, S3 e S4 têm a entrada em canto vivo, com saída cônica e ângulos de 0° , 15° , 30° e 45° , respectivamente.

Um dos parâmetros importantes e que altera fortemente os valores obtidos numericamente, principalmente os campos de pressão, é o comprimento do domínio de saída no qual a condição de contorno parabólica da velocidade é aplicada no programa computacional. Isto acontece porque para que a condição de contorno parabólica seja adequada, o escoamento deve estar plenamente desenvolvido, ou seja, os efeitos da placa a montante não devem ser mais importantes. Deve-se salientar que é possível aplicar a condição de contorno parabólica onde não existe o perfil plenamente desenvolvido e obter resultados até coerentes para as velocidades. Este procedimento, no entanto, é incorreto

7 - RESULTADOS E DISCUSSÕES

7.1 - INTRODUÇÃO

Resultados para o regime permanente e transiente são apresentados em função dos diferentes parâmetros envolvidos, caracterizando os sistemas de medição de vazão utilizados. Para ambos os regimes de escoamento a solução numérica é obtida considerando-se o escoamento compressível e incompressível. É importante esta consideração pois a existência de ar livre ou diluído no óleo pode alterar significativamente os resultados para o escoamento pulsante. Tanto para o regime permanente como para o transiente, os resultados experimentais constituem-se nas condições de entrada do programa computacional, permitindo sempre a corroboração dos resultados numéricos.

Para o regime transiente, os resultados experimentais corroboram tanto os resultados obtidos do modelo analítico como os resultados do modelo numérico. Da metodologia experimental são obtidos os gradientes dinâmicos de pressão na placa, $\Delta P_e(t)$, as vazões dinâmicas na placa, $Q_{te}(t)$, os coeficientes de vazão, $C_{qe}(t)$, as razões de amplitude instantâneas, $Ra_e(t)$, e a fase, θ_e .

No modelo numérico são utilizadas as vazões transientes, $Q_{te}(t)$, como condições de contorno de entrada e são obtidos os gradientes de pressão na placa, $\Delta P_n(t)$, e os coeficientes de vazão, $C_{qn}(t)$, através da solução das equações de Navier Stokes. Neste caso, são estes os parâmetros a serem comparados com os valores experimentais.

Do modelo analítico são obtidas as razões de amplitude ou ganhos,

pois quando os campos de pressão são os de maior interesse, tal como ocorre no presente trabalho, este procedimento leva a resultados errados na pressão, embora os campos de velocidade pareçam ser coerentes. Uma das formas de detectar o comprimento adequado do domínio de saída neste caso, é através da queda de pressão no centro do duto. O procedimento utilizado consiste em considerar, primeiramente, um domínio de saída relativamente grande e observar onde a pressão começa a cair suavemente, sem interferência dos efeitos da placa à montante. A partir deste ponto, a queda de pressão representa apenas a perda de carga no duto. Desta forma, pode-se obter o domínio mínimo e máximo para uso na solução numérica, correspondente à vazão mínima e máxima de trabalho, respectivamente. Neste caso, como todas as placas utilizadas têm a mesma relação de diâmetros, estes comprimentos foram praticamente da mesma ordem de grandeza para todas as placas. A Fig. 7.1 mostra o comprimento do domínio de saída para a vazão mínima e máxima de trabalho. Neste caso, para a vazão de base mínima, Q_{0min} , ($1,8 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$) utilizou-se um domínio de saída da ordem de 0,6 m, enquanto que para a vazão de base máxima de trabalho, Q_{0max} , ($6,0 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$) utilizou-se um domínio de saída da ordem de 2,4 m, para todas as placas. A Fig. 7.1 mostra também que a partir de um certo valor do domínio de saída ($\cong 2,4 \text{ m}$), a queda de pressão, para ambas as vazões, é praticamente a mesma, já que as velocidades são pequenas e o retorno está ligado ao tanque de armazenamento, o qual esta na pressão atmosférica.

A calibração estática das placas, mostrada nas Figs. 3.14 a 3.18, pode ser realizada agora com os gradientes de pressão obtidos numericamente. As Figs. 7.2 a 7.5 mostram os gradientes de pressão na placa em função das vazões de trabalho utilizadas para as placas E1, S2, S3 e S4, respectivamente. Aqui, os valores de ΔP obtidos numericamente são os correspondentes ao escoamento compressível, já que não houve praticamente nenhuma diferença em relação aos valores obtidos para escoamento incompressível. Estes resultados apenas confirmam o fato de que para

escoamento de líquidos a baixas velocidades a variação da densidade é praticamente nula. Por outro lado, os valores experimentais de ΔP são os obtidos da calibração estática das placas, mostradas nas Figs. 3.14, 3.16, 3.17 e 3.18, respectivamente.

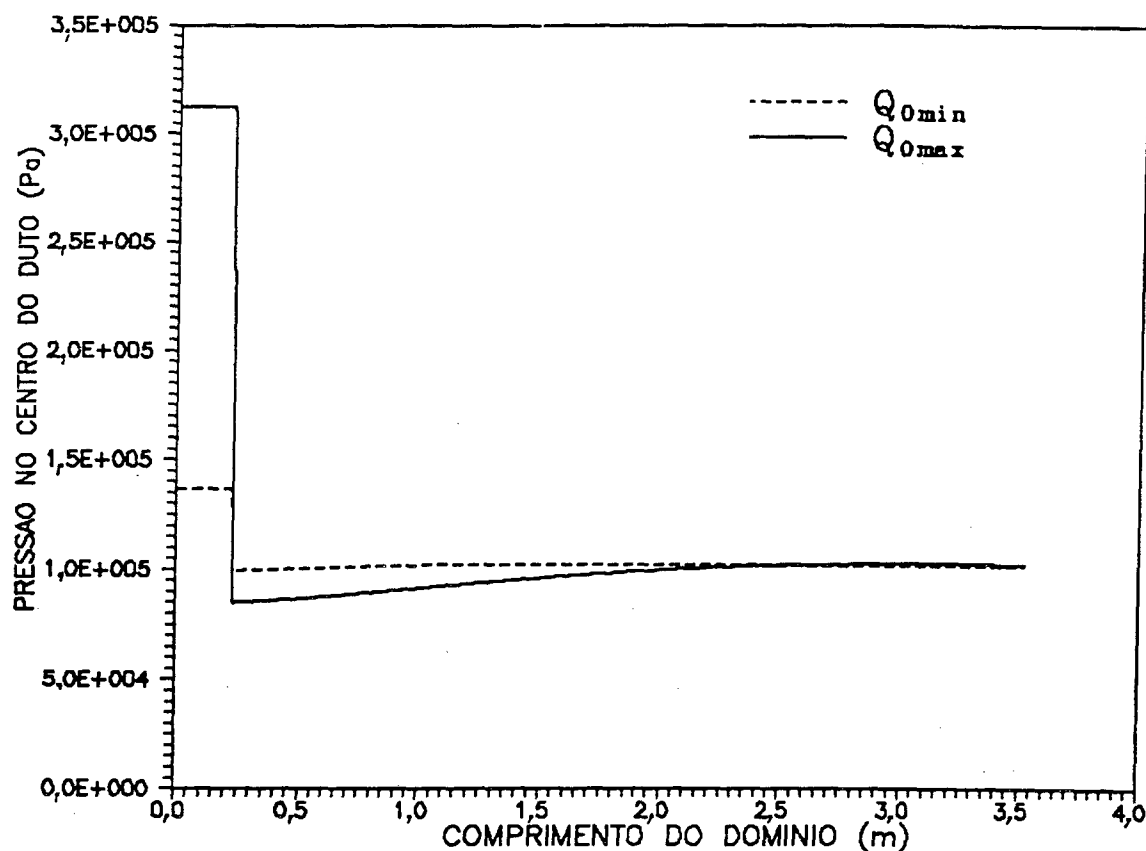


Fig. 7.1 - Determinação do domínio de saída em função da queda de pressão na placa.

As Figs. 7.2 a 7.5 mostram boa concordância entre os resultados numéricos e experimentais, para a faixa de vazões utilizada. Esta faixa de vazões corresponde a uma faixa de número de Reynolds entre 5 e 700, quando baseado no diâmetro do duto ou entre 25 e 3500, quando baseado no diâmetro do orifício. Aqui, as diferenças encontradas entre os valores numéricos e experimentais representam percentagens menores que as incertezas dos sistemas de medição correspondentes, obtidas experimentalmente. Isto significa que o erro máximo (incerteza) obtido nos resultados numéricos está dentro da mesma

ordem de grandeza daquele obtido no sistema de medição experimental.

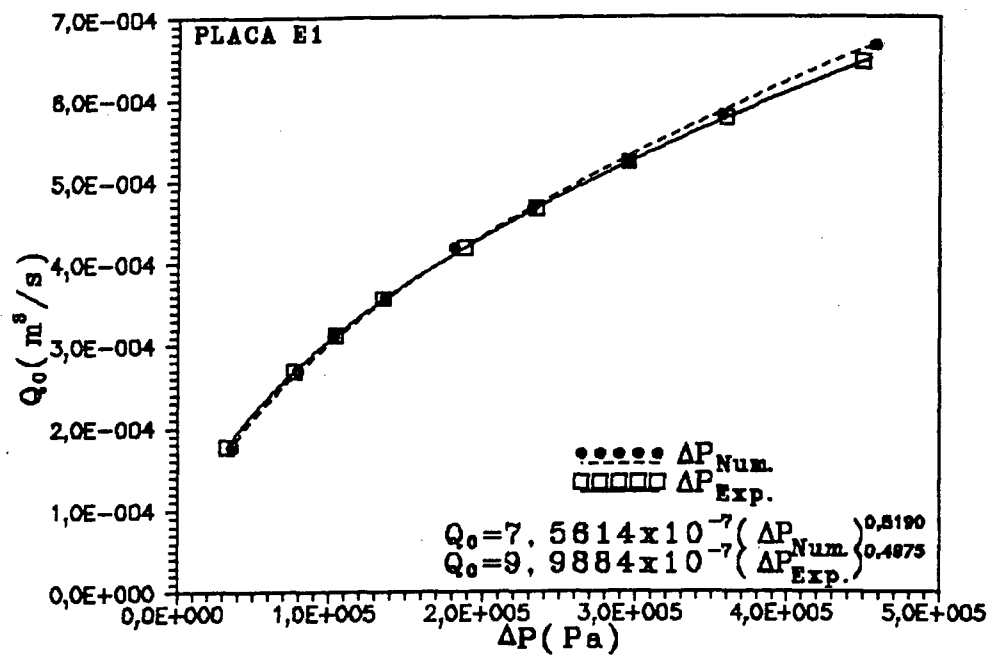


Fig. 7.2 - $Q_0 \times \Delta P$ para a placa E1.

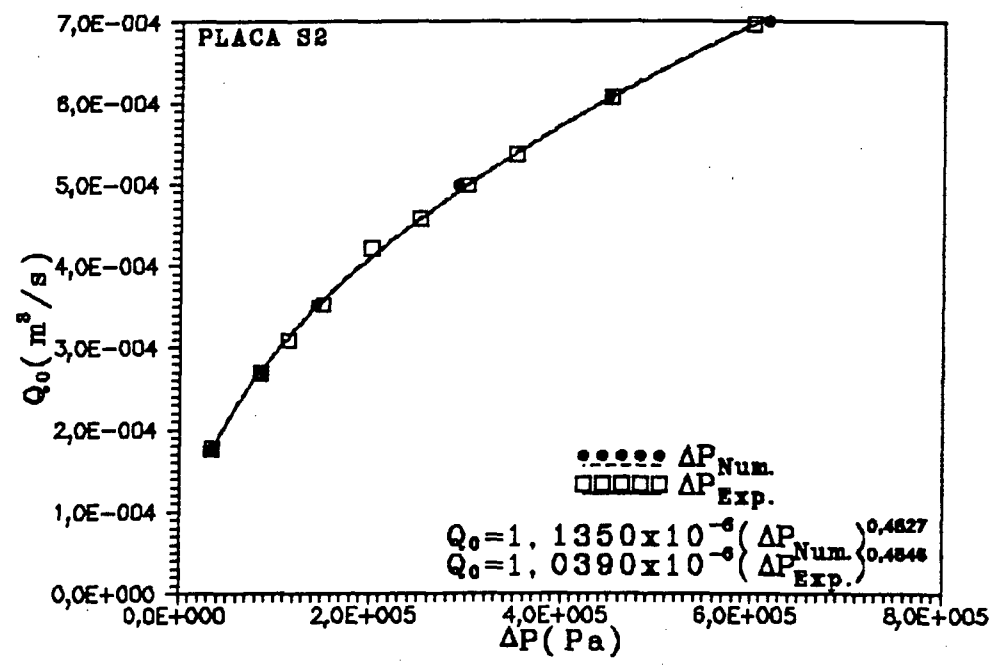


Fig. 7.3 - $Q_0 \times \Delta P$ para a placa S2.

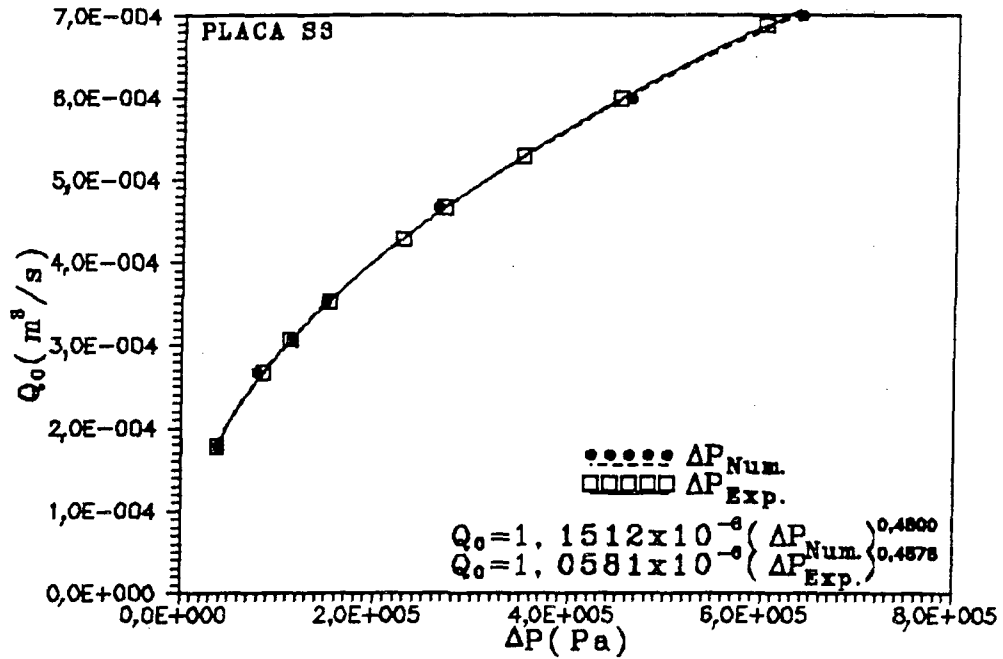


Fig. 7.4 - $Q_0 \times \Delta P$ para a placa S3.

Da mesma forma, os coeficientes de vazão são mostrados nas Figs. 7.6 a 7.8 para as placas E1, S2 e S3, respectivamente. Estes coeficientes são plotados em função da raiz quadrada do número de Reynolds, baseado no diâmetro do orifício.

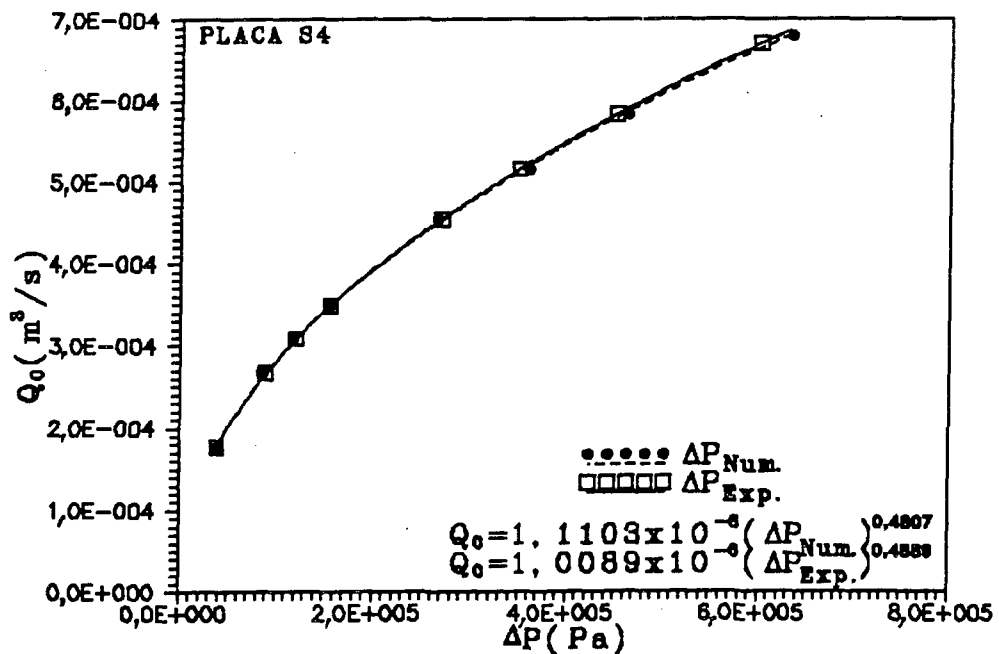


Fig. 7.5 - $Q_0 \times \Delta P$ para a placa S4.

As Figs. 7.6 a 7.8 mostram que praticamente não há diferença entre os valores obtidos para o escoamento compressível e incompressível. Por outro lado, os valores experimentais encontram-se, em todos os casos, ligeiramente acima dos valores numéricos, mas dentro da incerteza do sistema de calibração de vazão utilizado. Para placa E1, S4 e S1, por exemplo, a Fig. 3.20 mostra que, na faixa de vazões utilizada, os erros de medição da vazão média Q_0 variam de 2 a 5%. No caso dos coeficientes de vazão, as discrepâncias com os dados experimentais são mais acentuados para a placa S2, tal como

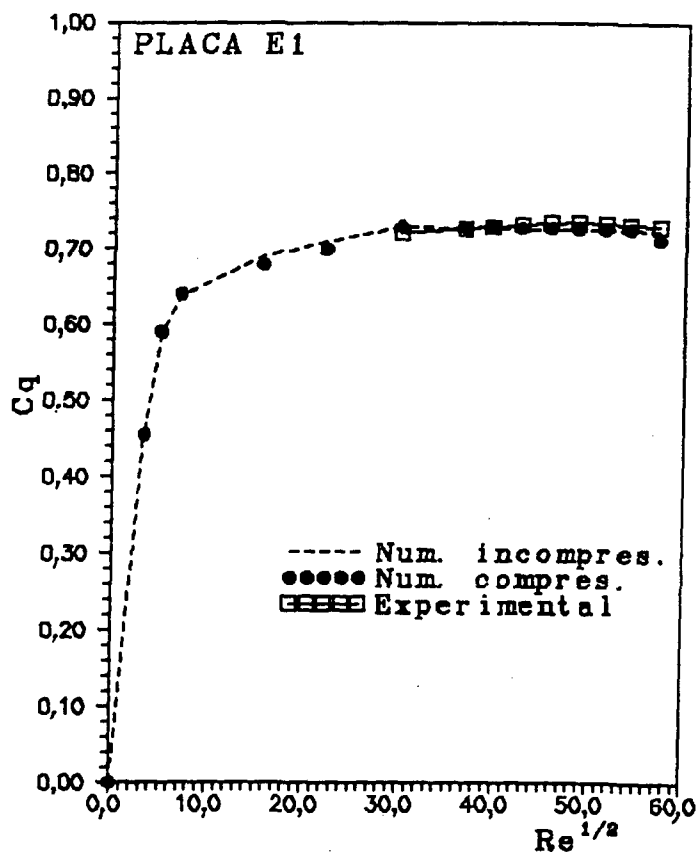


Fig. 7.6 - Coeficiente de vazão para a placa E1.

mostra a Fig. 7.7. No entanto, estes erros não ultrapassam 4% para esta placa, o que está dentro da incerteza da medição da vazão Q_0 . Para as demais placas,

discrepâncias de 0,5 a 2,0% são encontradas, indicando resultados ainda melhores.

A Fig. 7.9 reúne os coeficientes obtidos numericamente para o escoamento compressível, para todas as placas de trabalho. Para a faixa de trabalho utilizada ($25 \leq Re \leq 3500$) a placa S4 apresenta menores coeficientes, enquanto que a placa E1 apresenta os maiores coeficientes de vazão.

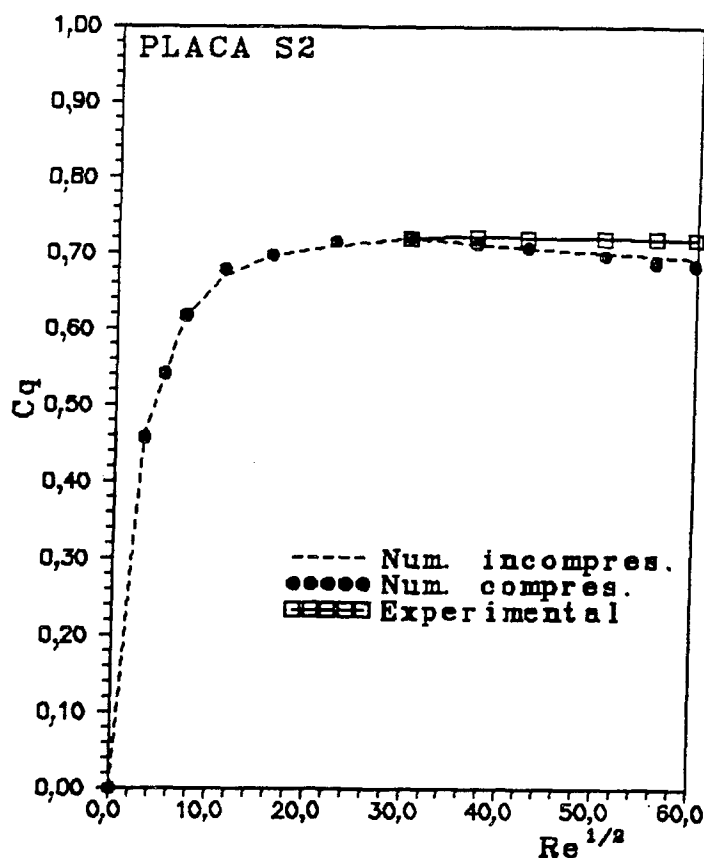


Fig. 7.7 - Coeficiente de vazão para a placa S2.

A Fig. 7.10, por sua vez, reúne os coeficientes de vazão experimentais em função da raiz quadrada do número de Reynolds. Nota-se que para a faixa de Re utilizada ($900 \leq Re \leq 3500$), e da mesma forma que para os coeficientes numéricos, as placas E1 e S4 apresentam os maiores e menores coeficientes de vazão, respectivamente. As Figs. 7.9 e 7.10 não comparam dados experimentais com dados numéricos, mas apenas reúnem os resultados e mostram o comportamento entre placas. Note que para os resultados experimentais, apenas valores para números de Reynolds acima de 900 são apresentados.

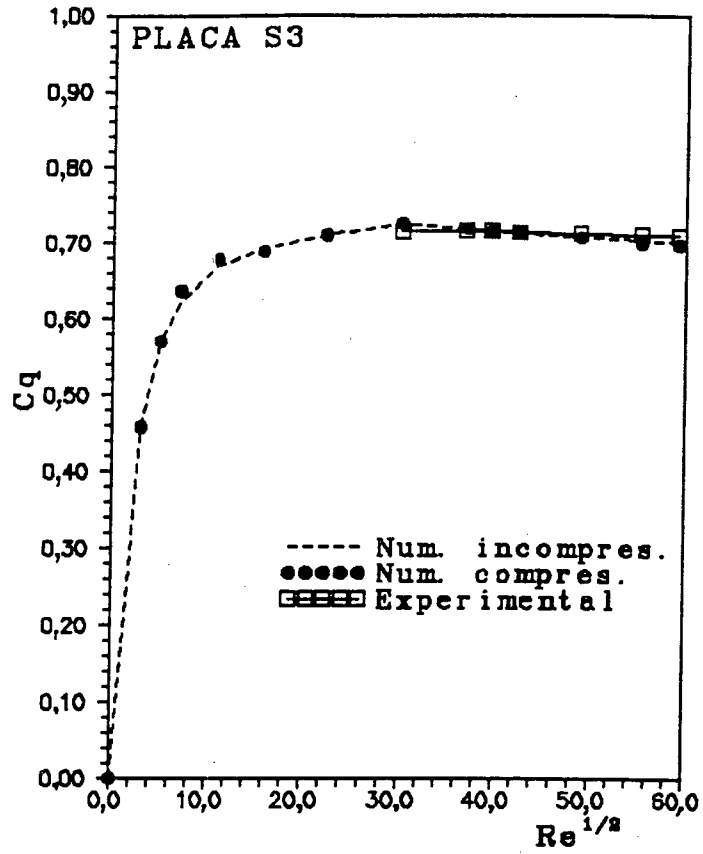


Fig. 7.8 - Coeficiente de vazão para a placa S3.

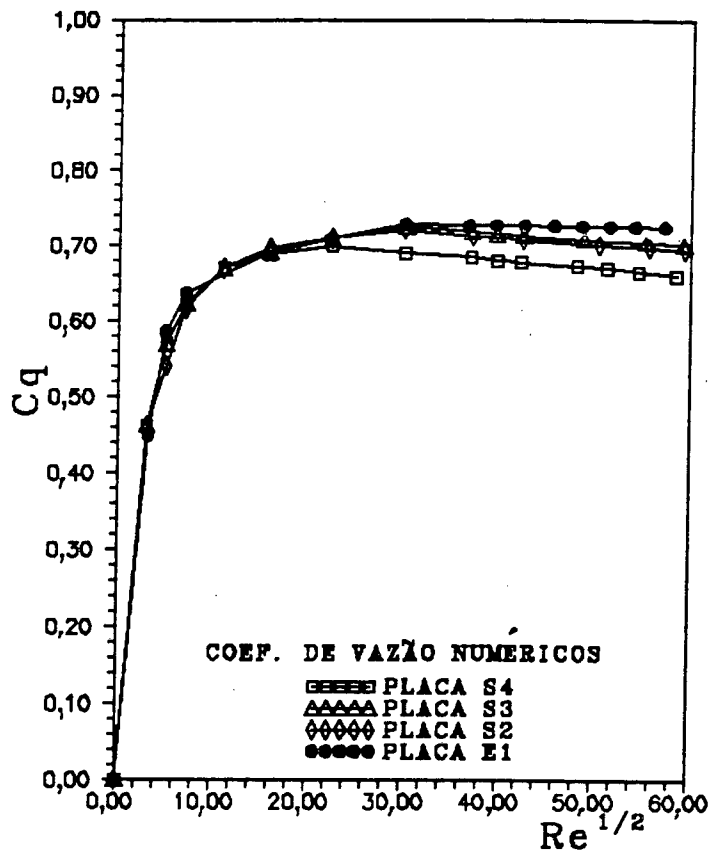


Fig. 7.9 - Coeficientes de vazão numéricos.

As Figs. 7.2 a 7.10 mostram que os parâmetros globais dos sistemas de medição de vazão utilizados, tais como gradientes de pressão e coeficientes de vazão estáticos, podem ser perfeitamente reproduzidos numericamente, sem necessidade de montagens experimentais, de custo mais elevado. Desta forma, conhecendo-se as propriedades do fluido, as vazões desejadas, as dimensões dos

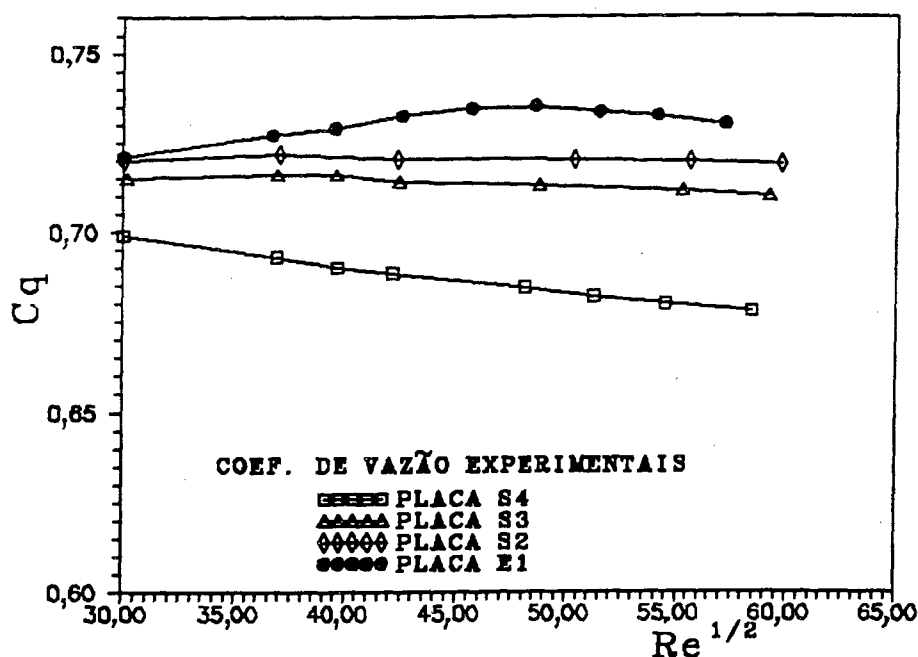


Fig. 7.10 - Coeficientes de vazão experimentais.

dutos, podem-se obter numericamente os coeficientes de vazão estáticos para o escoamento laminar dentro da faixa de número de Reynolds utilizada. A utilização da metodologia compressível-incompressível permite ainda trabalhar com qualquer tipo de fluido (líquidos e gases) para análise dos coeficientes de vazão e demais parâmetros característicos do sistema de medição. Esta metodologia permite ainda a solução para qualquer geometria de orifício ou restrição, podendo ser aplicada também a bocais de fluxo e venturis.

As características permanentes locais do escoamento podem também ser estudadas através da análise dos campos de velocidades e pressões obtidos numericamente. As Figs. 7.11 a 7.14 mostram as linhas de corrente obtidas para números de Reynolds 25, 50, 250, 500, 1000, 1500 e 2500 para as placas E1, S1, S3 e S4, respectivamente.

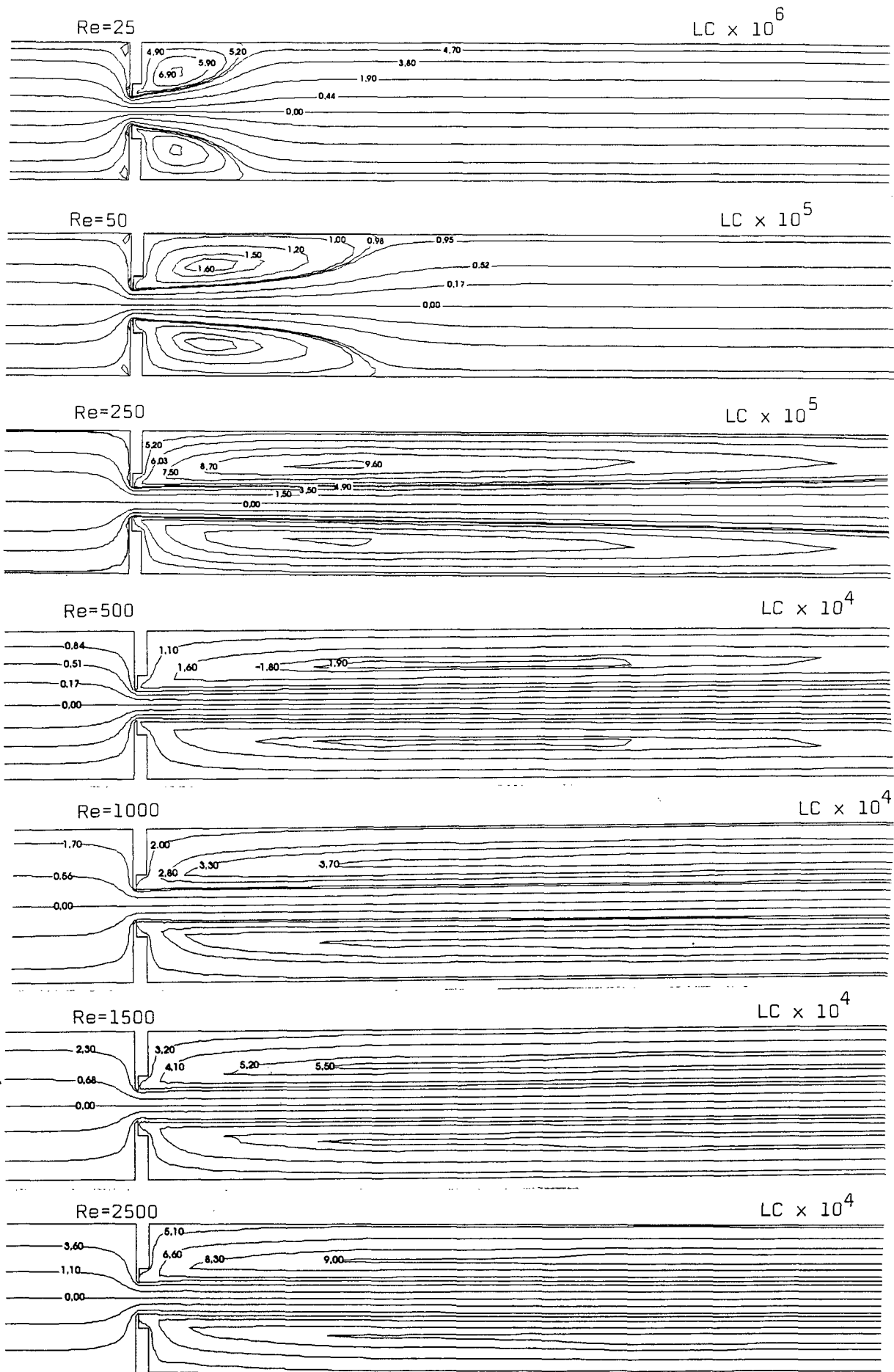
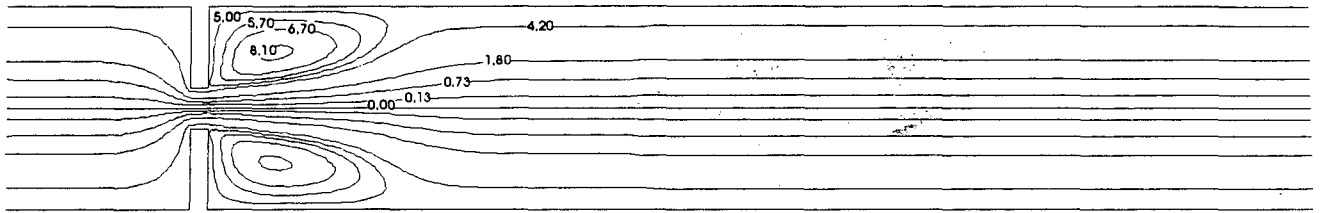


Fig. 7.11 - Linhas de corrente para a placa E1.

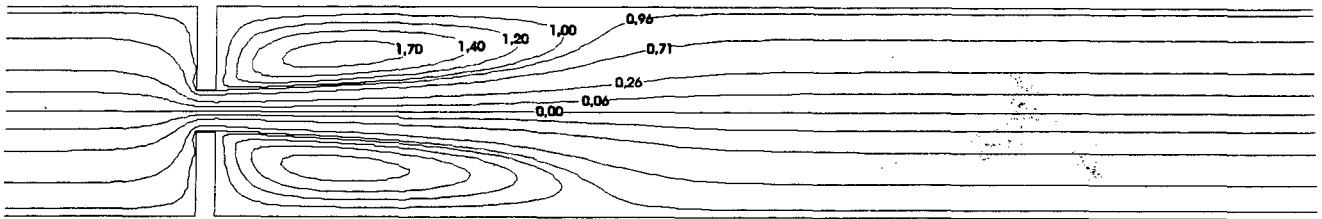
Re=25

LC x 10⁶

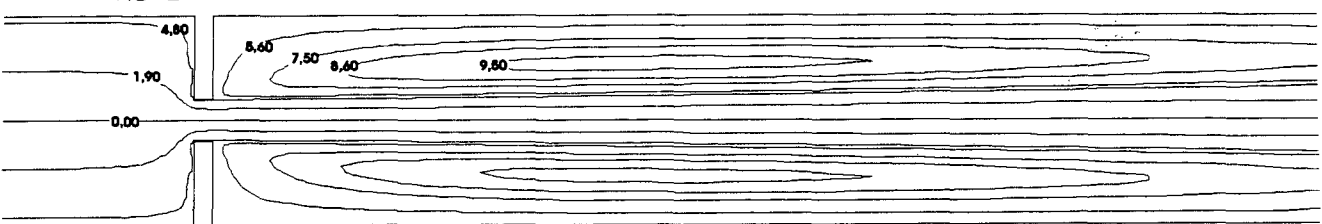
148



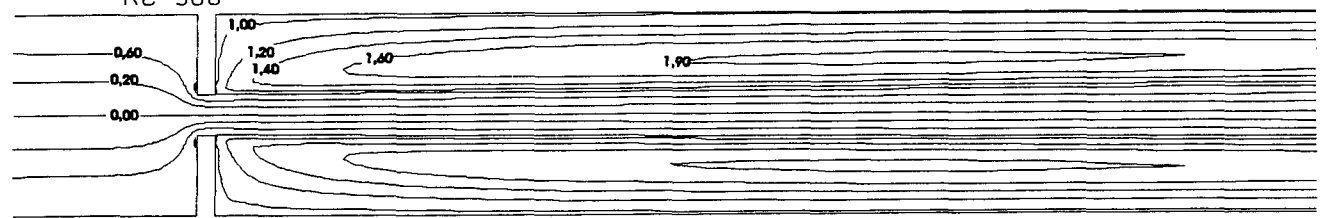
Re=50

LC x 10⁵

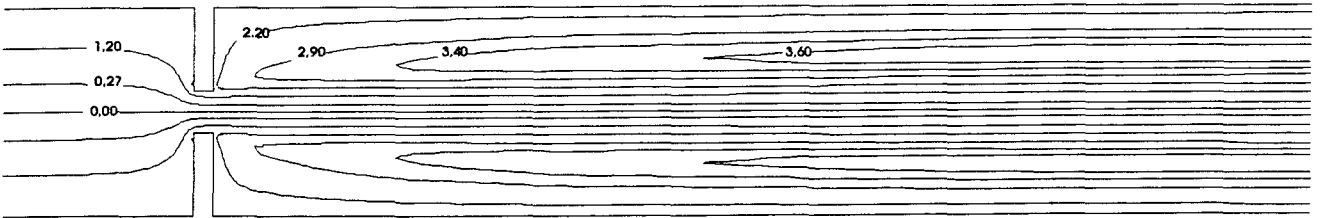
Re=250

LC x 10⁵

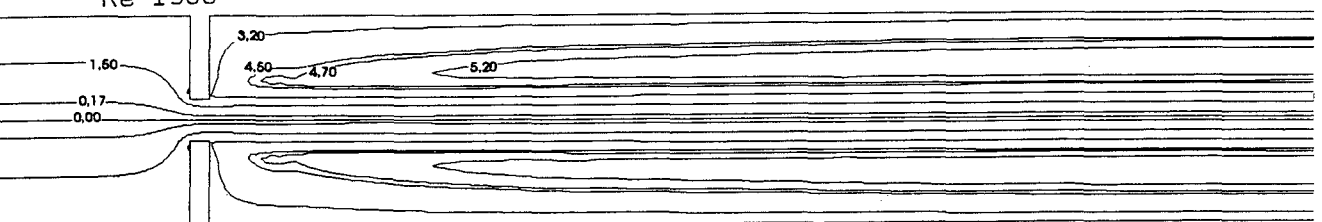
Re=500

LC x 10⁴

Re=1000

LC x 10⁴

Re=1500

LC x 10⁴

Re=2500

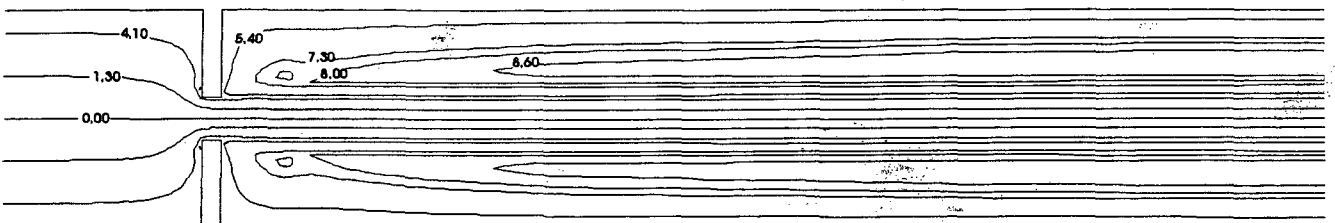
LC x 10⁴

Fig. 7.12 - Linhas de corrente para a placa S1.

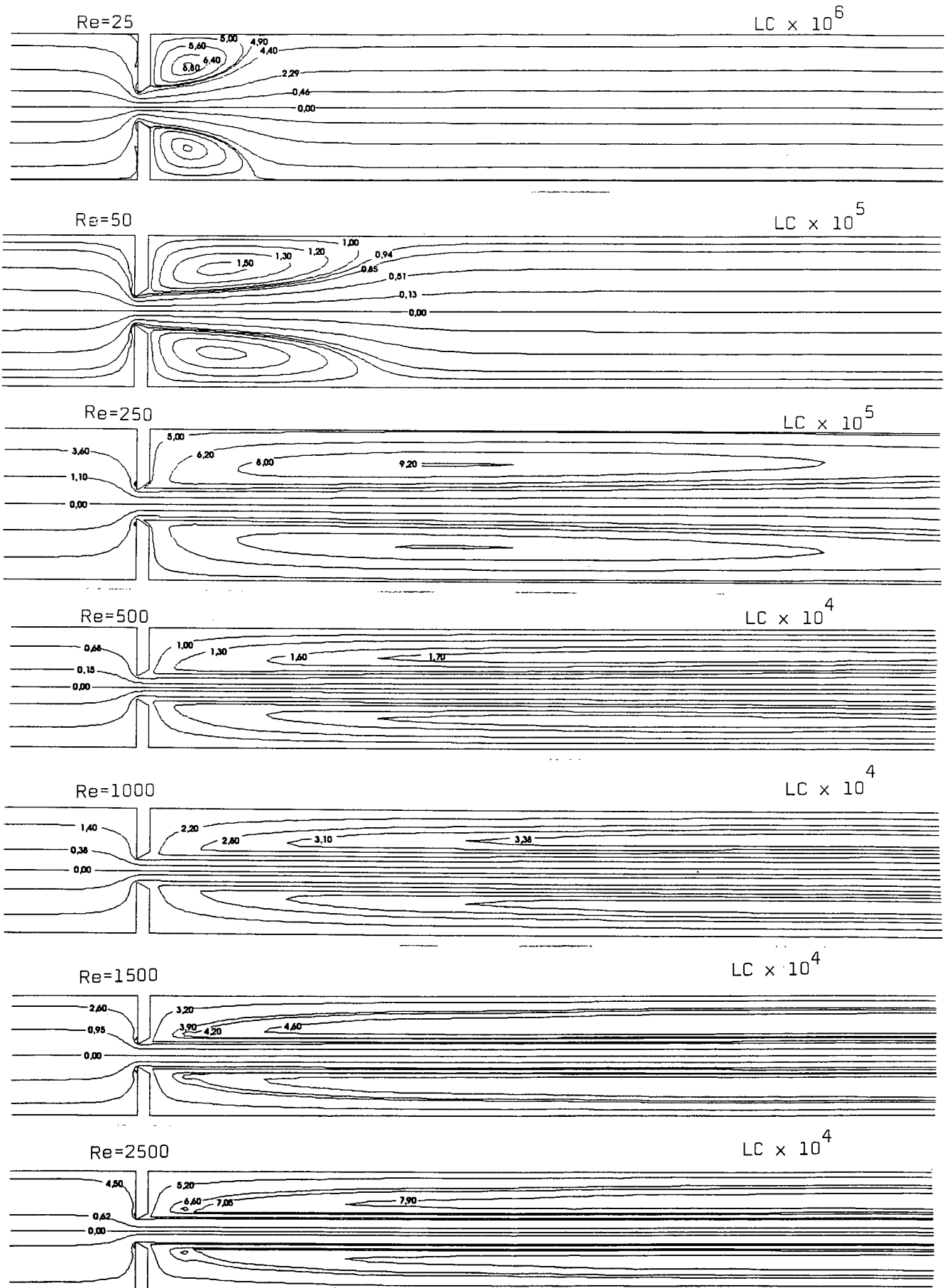


Fig. 7.13 Linhas de corrente para a placa S3

As linhas de corrente mostradas nas Figs. 7.11 a 7.14 ilustram o comportamento do escoamento nas placas, em função do número de Reynolds. O aumento do número de Reynolds implica no aumento do comprimento necessário para o desenvolvimento do escoamento a jusante da placa. Desta forma, estudos podem ser feitos numericamente para determinar os comprimentos de duto reto necessários a jusante da placa, em função das vazões utilizadas. Por outro lado, nota-se que o aumento do número de Reynolds praticamente não altera o escoamento a montante da placa, tal como era de se esperar..

Na Fig. 7.11, as linhas de corrente da placa E1 mostram pequenas recirculações a montante, perto do orifício e no canto da placa, para números de Reynolds de 25 e 50. Acima destes valores, nenhuma recirculação foi detectada a montante da placa.

Na Fig. 7.12, as linhas de corrente mostram pequenas recirculações a montante da placa S1, perto do canto vivo da mesma, para números de Reynolds acima de 250. Por outro lado, um vórtice começa a aparecer em $Re=1500$ a jusante da placa. Este vórtice, torna-se bem visível para $Re=2500$. Para a placa S3 (Fig. 7.13) este vórtice, a jusante da placa, torna-se menos acentuado, quase desaparecendo para a placa S4 (Fig. 7.14). Isto indica que este vórtice, o qual pode provocar instabilidade nas tomadas de pressão, deve ser função do ângulo do chanfro da placa.

A partir desta análise pode-se concluir que as placas que apresentariam maior estabilidade na medição de pressão, e portanto as mais adequadas para medições de vazão nesta faixa de números de Reynolds, seriam as placas E1 e S4. Não é coincidência, portanto, que estas placas são as indicadas pelas normas para medições de vazão nestas condições (AFNOR [40]).

As Figs. 7.15 a 7.20 mostram as linhas de corrente para as diferentes placas, comparando-as para os mesmos números de Reynolds utilizados. A Fig. 7.15 mostra as linhas de corrente para o número de Reynolds igual a 25. Neste caso o comprimento de recirculação a jusante da placa é maior para a placa S1, com ângulo de chanfro igual a zero, e menor para a

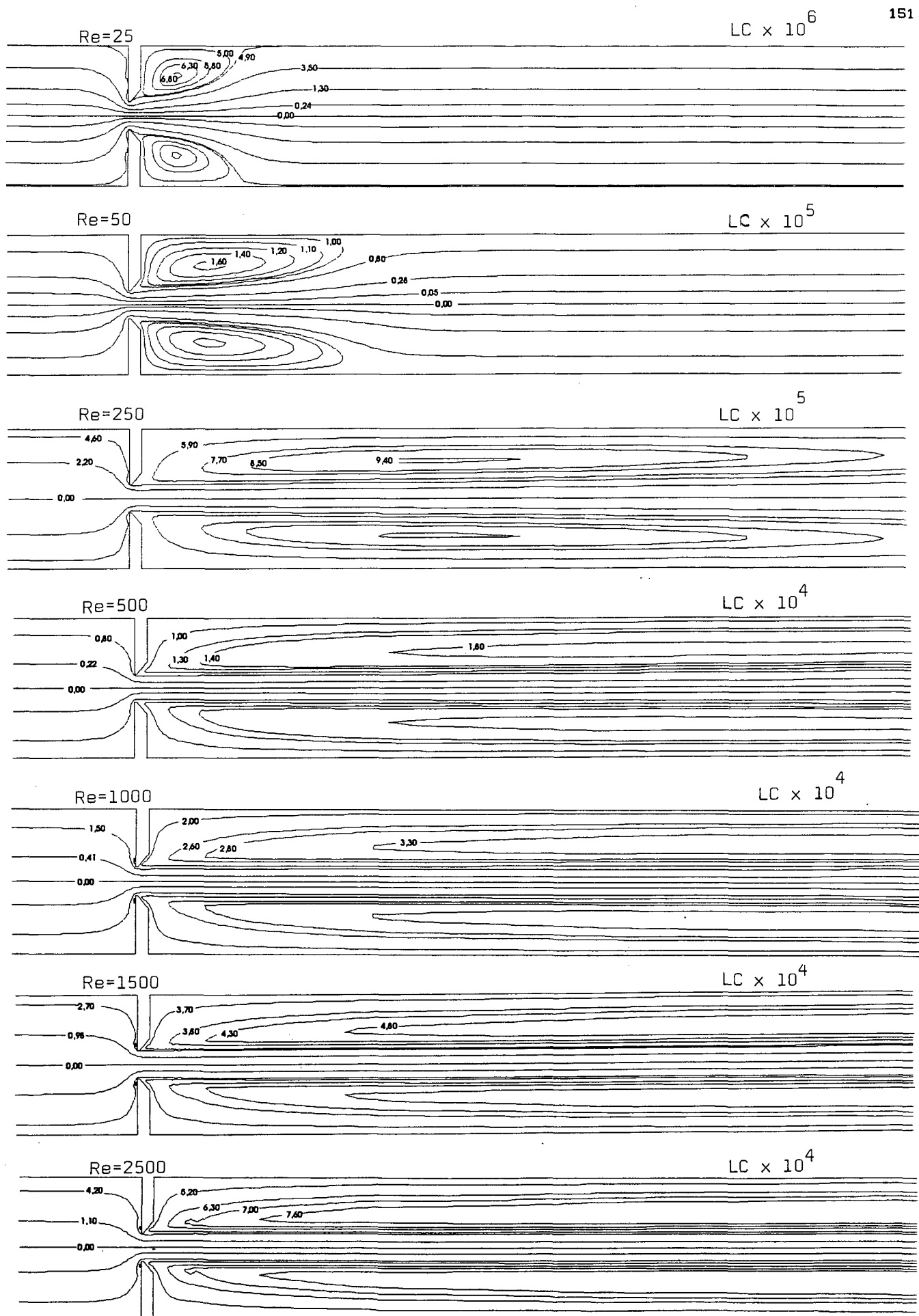


Fig. 7.14 - Linhas de corrente para a placa S4.

placa S4, com ângulo de chanfro igual a 45° . A placa E1 apresenta comprimentos de recirculação iguais aos da placa S4. As linhas de corrente para $Re = 50$, mostradas na Fig. 7.16, indicam que a placa S1 continua tendo o maior comprimento de recirculação a jusante.

As placas E1, S2, S3 e S4 têm praticamente o mesmo comprimento de recirculação para este número de Reynolds.

As linhas de corrente para $Re = 250$ são mostradas na Fig. 7.17. Aqui o comprimento de recirculação é mais difícil de ser analisado devido ao domínio de saída ser muito pequeno, insuficiente para abranger toda a recirculação. Por outro lado, o aumento da dimensão do domínio de saída também não permite a visualização clara das linhas de corrente devido à dimensão radial do duto ser muito pequena comparada com a sua dimensão axial, ficando cada vez mais fino à medida que se aumenta o domínio de saída. No entanto, a análise mostrou que para as placas tipo S o comprimento de recirculação a montante das mesmas diminui à medida que o ângulo do chanfro da placa aumenta, sendo, portanto, a placa S4 a que apresenta o menor comprimento de recirculação para Reynolds a partir de 250.

Ao mesmo tempo, esta análise mostrou que é a placa E1 a que apresenta comprimentos de recirculação menores para Re a partir de 500. As Figs. 7.18 a 7.20 mostram, apenas como ilustração, as linhas de corrente para números de Reynolds 500, 1000 e 2500, respectivamente.

Como mencionado anteriormente, para $Re = 2500$ nota-se o surgimento de um novo vórtice a jusante das placas S1 e S2 e S3. Para a placa S4 este vórtice desaparece.

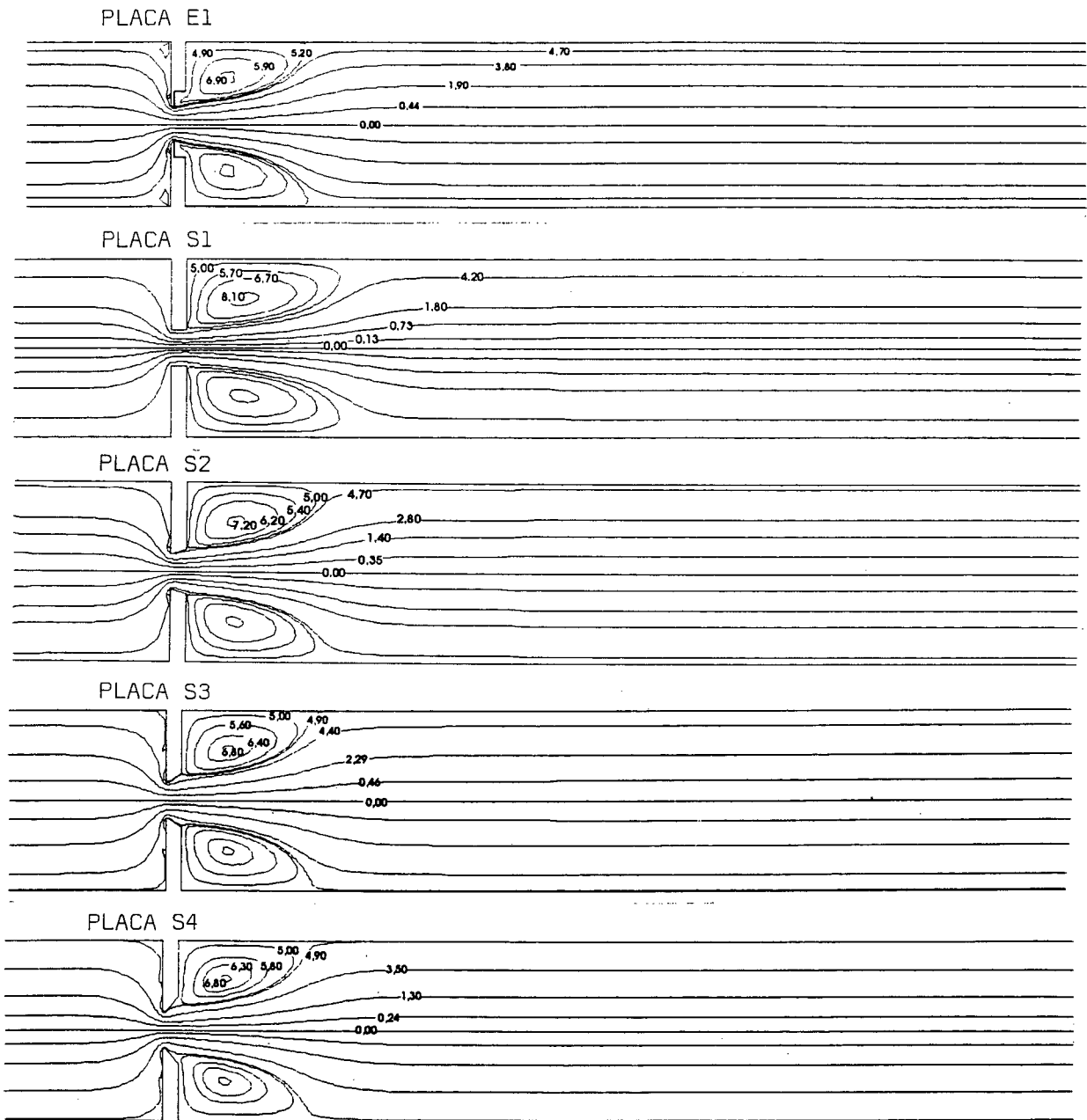


Fig. 7.15 - Linhas de corrente para $Re = 25$.

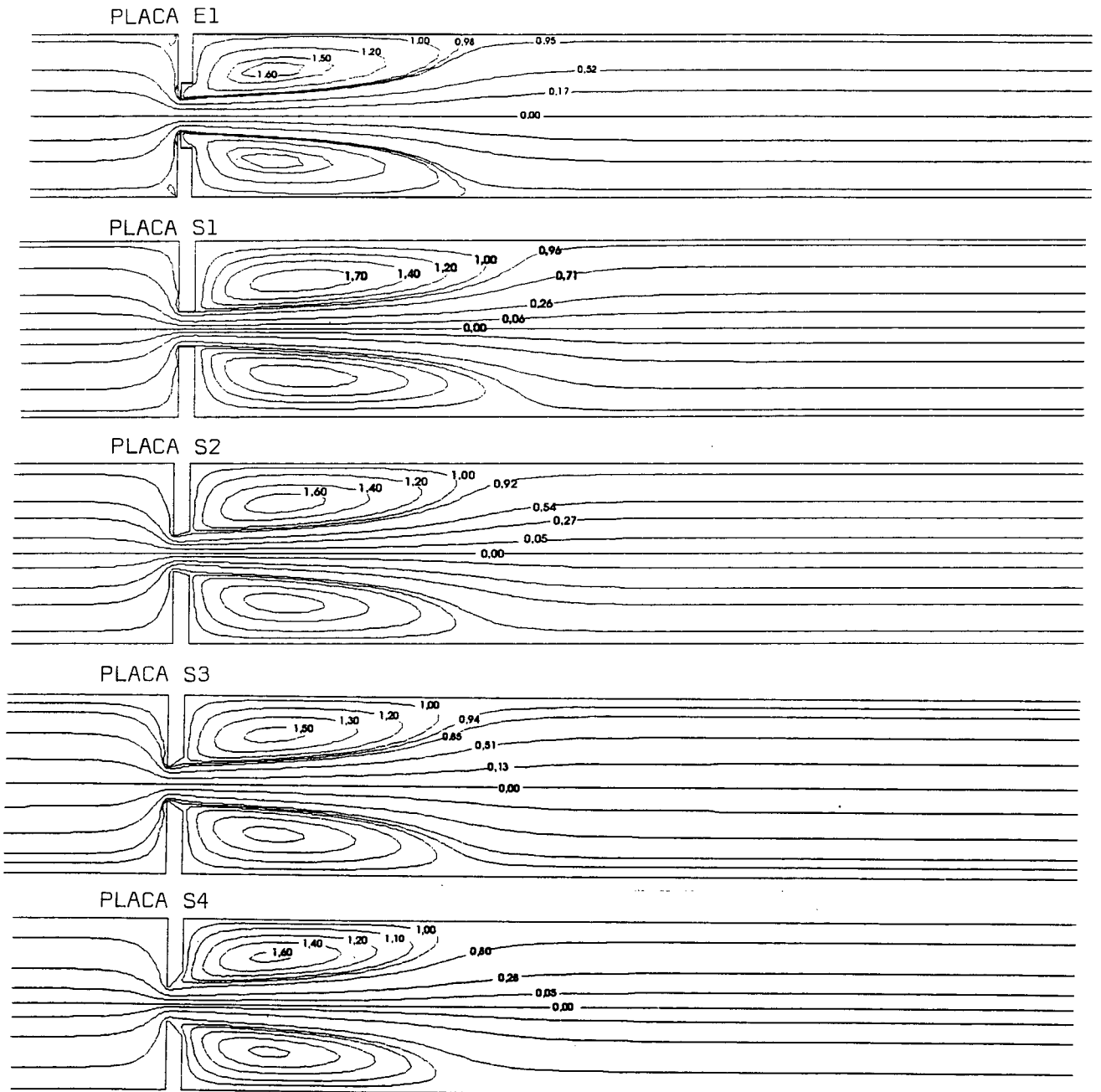


Fig. 7.16 - Linhas de corrente para $Re = 50$.

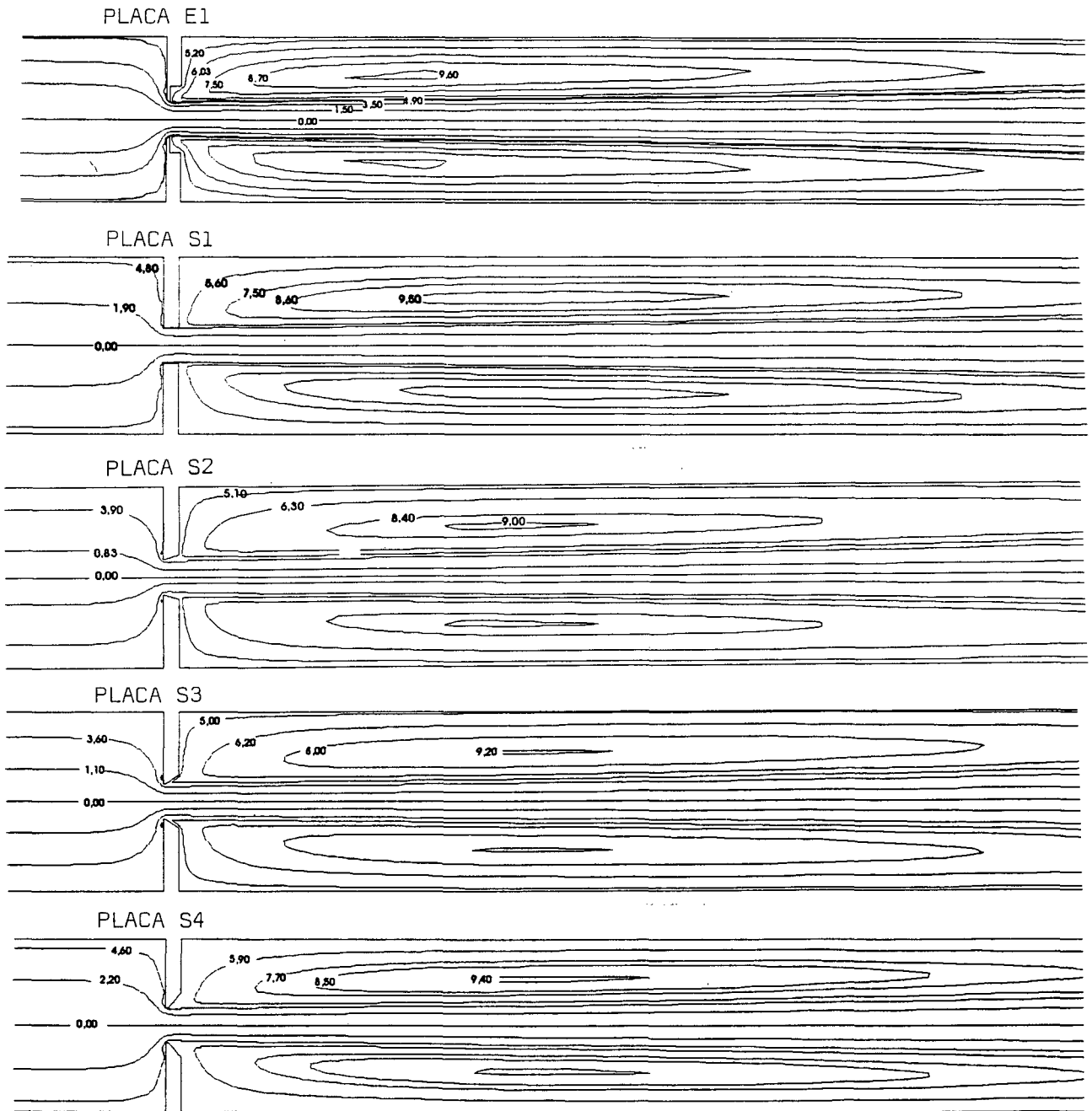


Fig. 7.17 - Linhas de corrente para $Re = 250$.

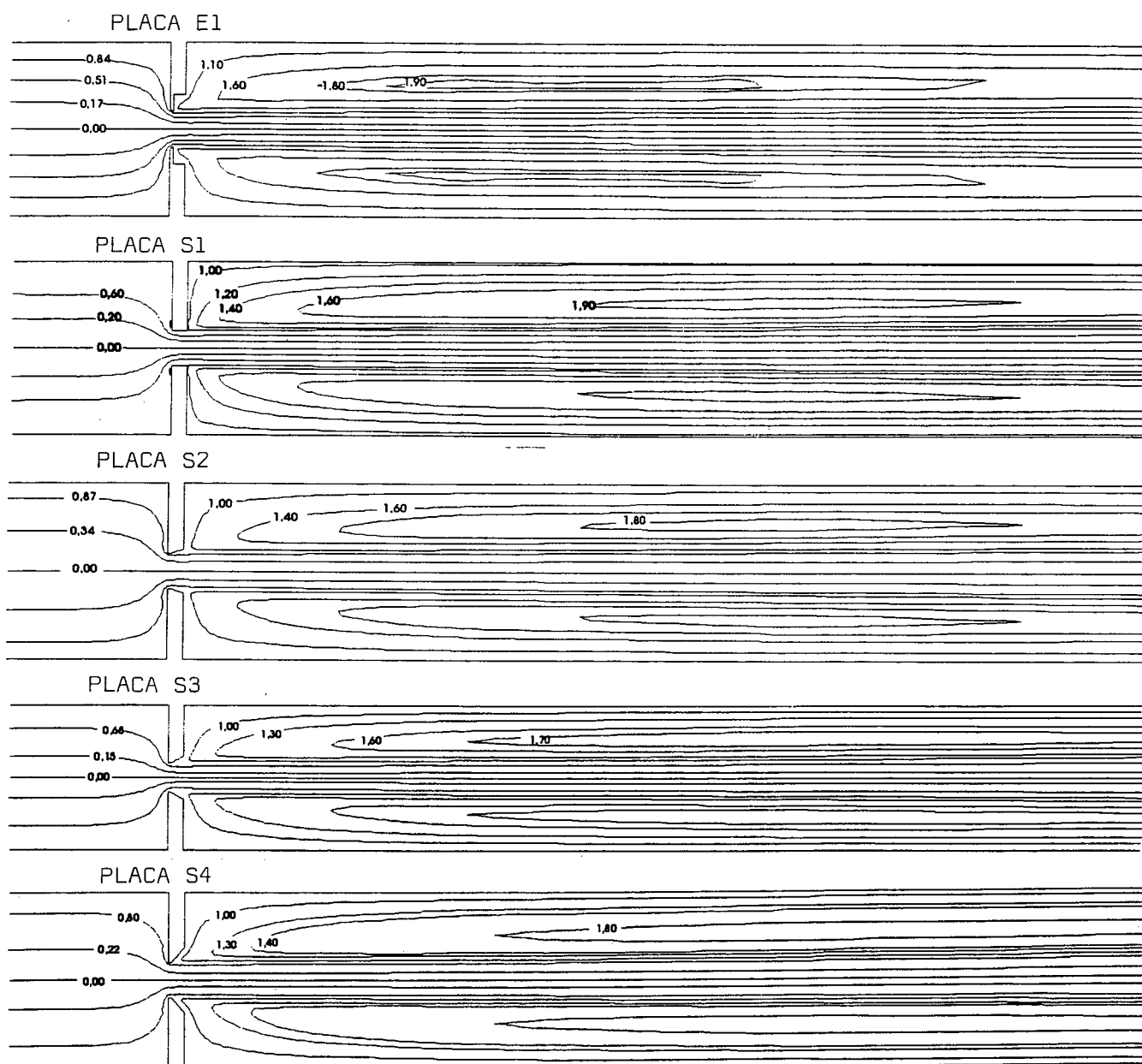


Fig. 7.18 - Linhas de corrente para $Re = 500$.

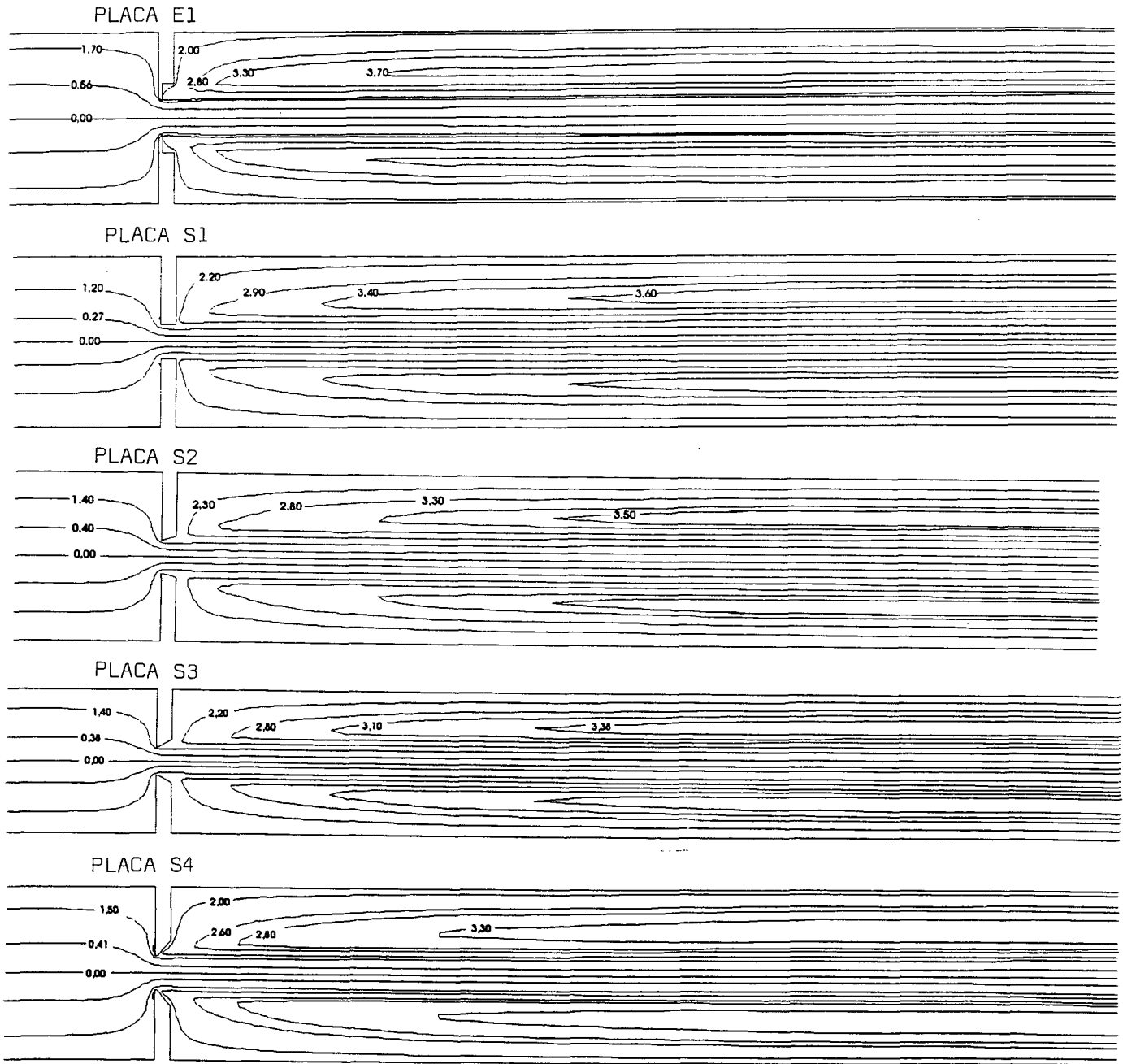


Fig. 7.19 - Linhas de corrente para $Re = 1000$.

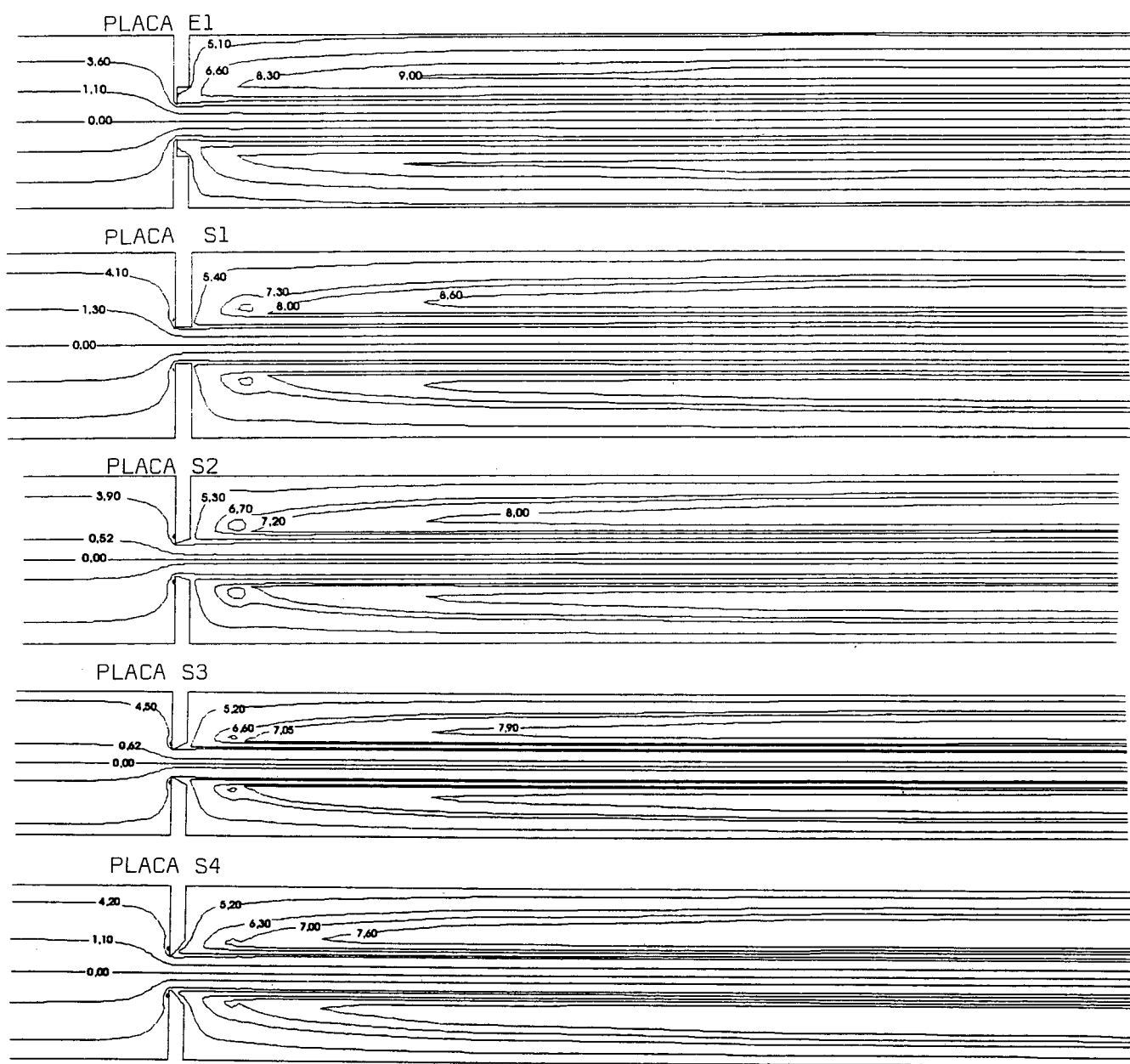


Fig. 7.20 - Linhas de corrente para $Re = 2500$.

A Fig. 7.21 mostra, apenas como ilustração, a forma das isobáricas obtidas com as placas S1, S2, S3 e S4, para $Re=1500$. Note-se a complexidade das isocurvas de pressão nas proximidades a jusante da placa e a recomposição rápida do escoamento. Note-se também que nos cantos das placas, onde as tomadas de pressão foram colocadas, as isocurvas mostram que a pressão apresenta um certo grau de estabilidade, sendo função apenas da coordenada axial nestas regiões.

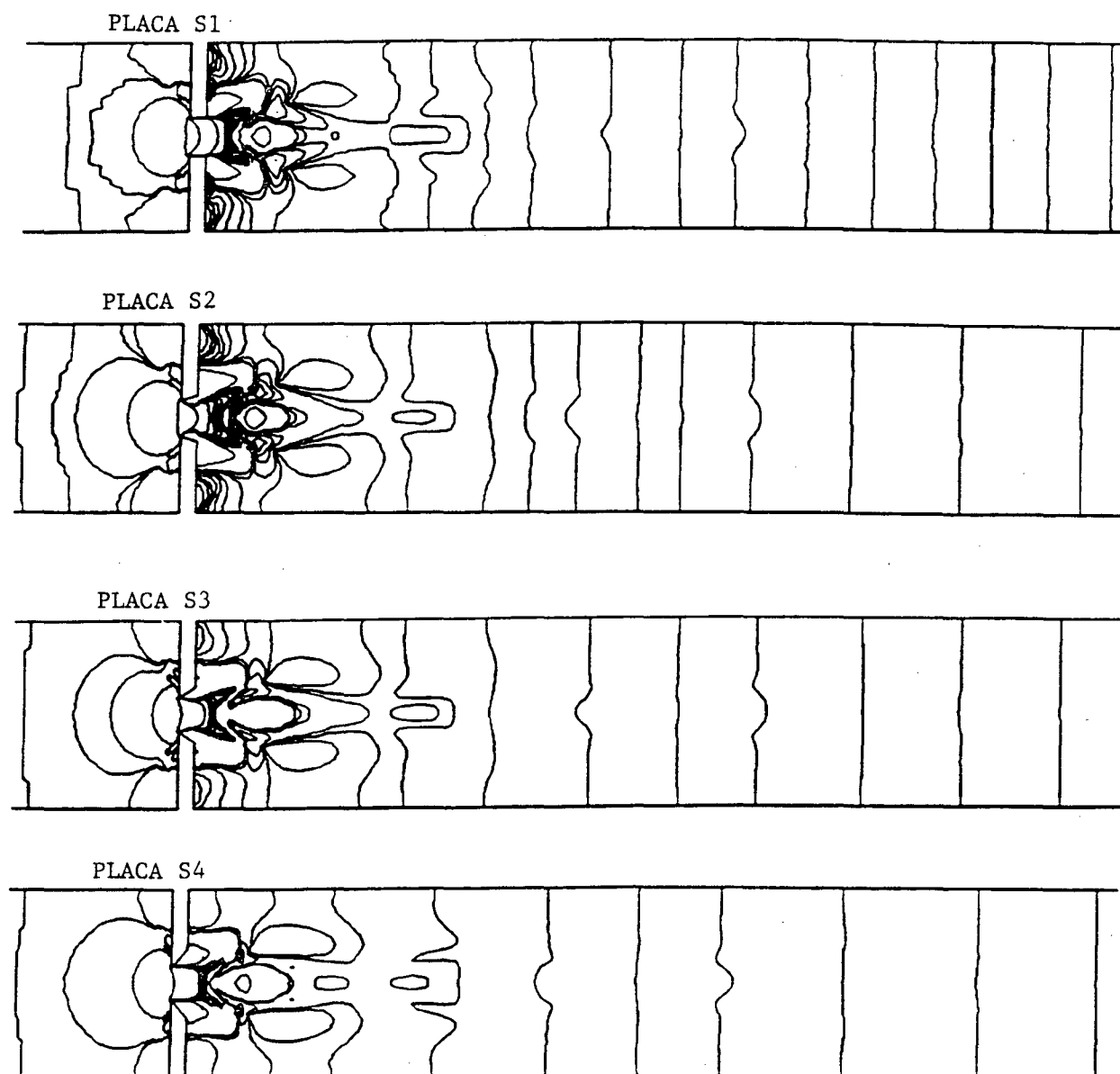


Fig. 7.21 - Isobáricas para $Re = 1500$.

7.2.1 - Comentários

- 1) Todos os resultados numéricos foram obtidos utilizando-se uma malha de 20×220 , sendo que o aumento do domínio de saída, a medida que o número de Reynolds aumenta, é obtido variando-se a relação x/y dos volumes elementares, a partir de uma determinada posição da malha a jusante da placa.
- 2) A convergência do programa numérico torna-se mais difícil com o aumento do número de Reynolds para todas as placas. Na reprodução dos dados experimentais, onde valores de até $Re = 3500$ foram utilizados, nota-se claramente uma convergência rápida para $Re < 2500$. Para as vazões onde o Re se aproxima de 2500 a convergência torna-se mais difícil, sendo bem mais demorada a partir deste valor até $Re = 3500$.
- 3) A solução numérica de escoamentos a baixo número de Reynolds através de placas de orifício, apresenta uma dificuldade adicional causada pela variação do regime de escoamento. Como mencionado no item 2, um $Re = 3500$ na placa corresponde a um $Re = 700$ no duto. Desta forma pode-se dizer que o escoamento é laminar no duto e turbulento na placa. Esta análise mostrou claramente que a convergência do programa torna-se bem mais difícil a medida que o número de reynolds atinge valores acima de 2300 com relação ao diâmetro do duto.
- 4) Para números de Reynolds acima de 3500 na placa ($Re > 700$ no duto) não foi obtida a convergência, mesmo tentando-se várias relaxações no tempo. Isto apenas confirma o fato mencionado anteriormente de que o escoamento não é mais laminar no orfício, embora permaneça laminar no duto. Neste caso, o acompanhamento passo a passo da convergência mostra claramente resíduos maiores nos volumes próximos à placa onde as velocidades são maiores.

5) A placa de entrada cônica E1 é a recomendada pelas normas para escoamentos a baixos números de Reynolds e diâmetros de tubulações menores que 40 mm (ver normas AFNOR 10-101 [40] e Delmee [2]). Por este motivo, esta geometria foi analisada no presente trabalho. A placa S4, de saída cônica, com ângulo de chanfro de 45° é a mais utilizada para a faixa de vazões estabelecida pelas normas (escoamentos turbulentos e diâmetros de tubulações maiores que 50 mm). As placas S1, S2 e S3, com ângulos de chanfro de 0° , 15° e 30° , não são recomendadas pelas normas e foram incluídas no presente trabalho apenas para analisar a influência do ângulo do chanfro no comportamento do escoamento.

6) experimentalmente, a placa E1 apresentou maior estabilidade na calibração, para toda a faixa de vazões utilizada. Neste caso, a repetibilidade dos resultados garantiu dispersões de medição muito pequenas. Por outro lado, a placa S1 mostrou grande instabilidade na calibração, obtendo-se dispersões muito grandes nas medições, principalmente para números de Reynolds mais elevados. Tudo indica que o canto vivo a jusante ($\alpha = 0$) produz efeitos de instabilidade no escoamento, tornando esta placa não apropriada para ser utilizada em medidores de vazão nesta faixa de número de Reynolds. As placas S2, S3 e S4 mostraram ter comportamentos estáveis na calibração, podendo ser utilizadas para escoamentos laminares, mesmo que as normas não as recomendem para escoamentos turbulentos. Neste caso, entenda-se como instabilidade do escoamento às variações bruscas de ΔP medidas pelos transdutores nas placas de orifício.

7) Numericamente a placa E1 apresentou convergência muito mais rápida do que as outras, além de reproduzir os resultados para malhas menores (10×220). Por outro lado, as placas S4, S3, S2 e S1 apresentaram maior número de iterações para a convergência, além de necessitar de uma malha relativamente maior a medida que o ângulo do chanfro da placa diminuía. Pode-se dizer, neste caso, que para as placas tipo S, o ângulo influencia fortemente no grau de

convergência e no tamanho da malha necessária para a solução numérica. Isto é, a convergência mais difícil e a necessidade de uma maior malha é para a placa S1, com $\alpha = 0$. Por outro lado, a placa mais fácil de convergir e cujos resultados podem ser obtidos com uma malha menor é a placa S4.

8) Os comentários 6 e 7 levam a crer que para a faixa de número de Reynolds utilizada experimentalmente, a placa mais adequada é a placa E1, de conformidade com o estabelecido pela Norma AFNOR-NF 10-101 [40]. Por outro lado, pelos resultados apresentados, as placas S1 e S2 seriam as menos indicadas para este tipo de escoamento.

9) Uma vez validada esta metodologia, resultados numéricos para outras relações de diâmetros e outras geometrias podem ser obtidas. No presente trabalho apenas resultados numéricos para relações de diâmetros de 0,2 foram apresentados, devido à necessidade de comparação com os resultados experimentais. Resultados experimentais para outras relações de diâmetros implicariam, neste caso, na substituição dos transdutores de pressão utilizados, uma dificuldade adicional quase impossível de vencer dada a infraestrutura experimental limitada disponível.

10) Embora os resultados para regime permanente tenham mostrado que o escoamento laminar de óleo pode ser tratado numericamente como um escoamento incompressível, a metodologia compressível-incompressível utilizada no presente trabalho, permite a substituição por qualquer tipo de fluido (líquidos e gases) e por qualquer dispositivo deprimogêneo (bocais, venturis ou placas de orifício) permitindo definir melhor o escoamento e analisar a possível influência da compressibilidade em escoamentos de gases.

11) Pode-se concluir que a simulação numérica de um medidor de vazão em regime permanente a baixos números de Reynolds pode perfeitamente caracterizar o

medidor de vazão, permitindo a normalização de parâmetros do sistema de medição. Desta forma, coeficientes de vazão, comprimentos de tubo reto a montante e a jusante, colocação mais adequada dos medidores de pressão, geometrias de placas mais adequadas, etc. podem ser normalizadas em função dos demais parâmetros fixos, tais como vazões, relações de diâmetros, etc. Finalmente, embora o modelo bidimensional não permita, podem-se estudar numericamente os efeitos da forma e tamanho de duto a montante da placa e da assimetria do perfil de velocidade na entrada do sistema utilizando-se uma metodologia numérica tridimensional.

12) O tempo de CPU para a solução numérica do regime permanente e transiente é totalmente dependente do intervalo de tempo, do número de Reynolds e do tipo de placa utilizada. Neste caso, para cada placa e para cada número de Reynolds foi otimizado o Δt , obtendo-se tempos de CPU da ordem de 250s, para o menor Re com a placa E1, até 10000s para o maior Re com a placa S1. Os resultados numéricos foram todos obtidos numa estação de trabalho HP-720.

7.3 - RESULTADOS PARA O REGIME TRANSIENTE

7.3.1 - Introdução

Os resultados transientes apresentados nesta seção referem-se apenas à placa E1, a qual, pelas razões expostas no item anterior, mostrou ser a placa mais adequada para escoamentos a baixos números de Reynolds, além de ter apresentado menores tempos de CPU na solução numérica. Para as demais placas, estes resultados devem ser influenciados apenas pelos parâmetros geométricos do orifício. Desta forma, a comparação com qualquer outro medidor de geometria diferente, deverá seguir o mesmo procedimento, mudando-se apenas

a geometria da restrição.

Por outro lado, como os tempos de CPU são maiores para as placas tipo S, tal como mencionado na seção anterior, a análise numérica para estas placas levaria a um trabalho mais demorado, podendo este trabalho ser realizado posteriormente. Com este intuito, os resultados experimentais para as demais placas encontram-se no apêndice D.

Para uma melhor compreensão na comparação dos resultados obtidos nas diferentes metodologias, primeiramente serão apresentados os resultados do modelo analítico, comparando-os com os experimentais. Seguindo o mesmo procedimento, os resultados numéricos são apresentados posteriormente.

7.3.2 - Resultados Analíticos X Experimentais

As Figs. 7.22 a 7.25 mostram o amortecimento do pulso de vazão com a frequência, para duas das vazões médias Q_0 . As figs. 7.22 e 7.23 mostram o amortecimento do pulso utilizando-se o modelo analítico, enquanto que as Figs. 7.24 e 7.25 mostram o amortecimento obtido com a metodologia experimental. As Figs. 7.22 a 7.25 mostram apenas uma visão global de como o pulso de vazão se amortece com o aumento da frequência, sem quantificar nem a amplitude e nem a fase. Posteriormente, uma análise mais detalhada para cada uma das frequências utilizadas quantificará estes parâmetros. A linha tracejada mostra sempre o pulso na saída do cilindro do gerador de flutuações.

Para o amortecimento obtido pelo modelo analítico (Figs. 7.22 e 7.23), o sinal de entrada representa o pulso de vazão não amortecido obtido através da Eq. 3.10. Por outro lado, o sinal de saída representa a vazão amortecida na placa de orifício, dada pela Eq. 4.56.

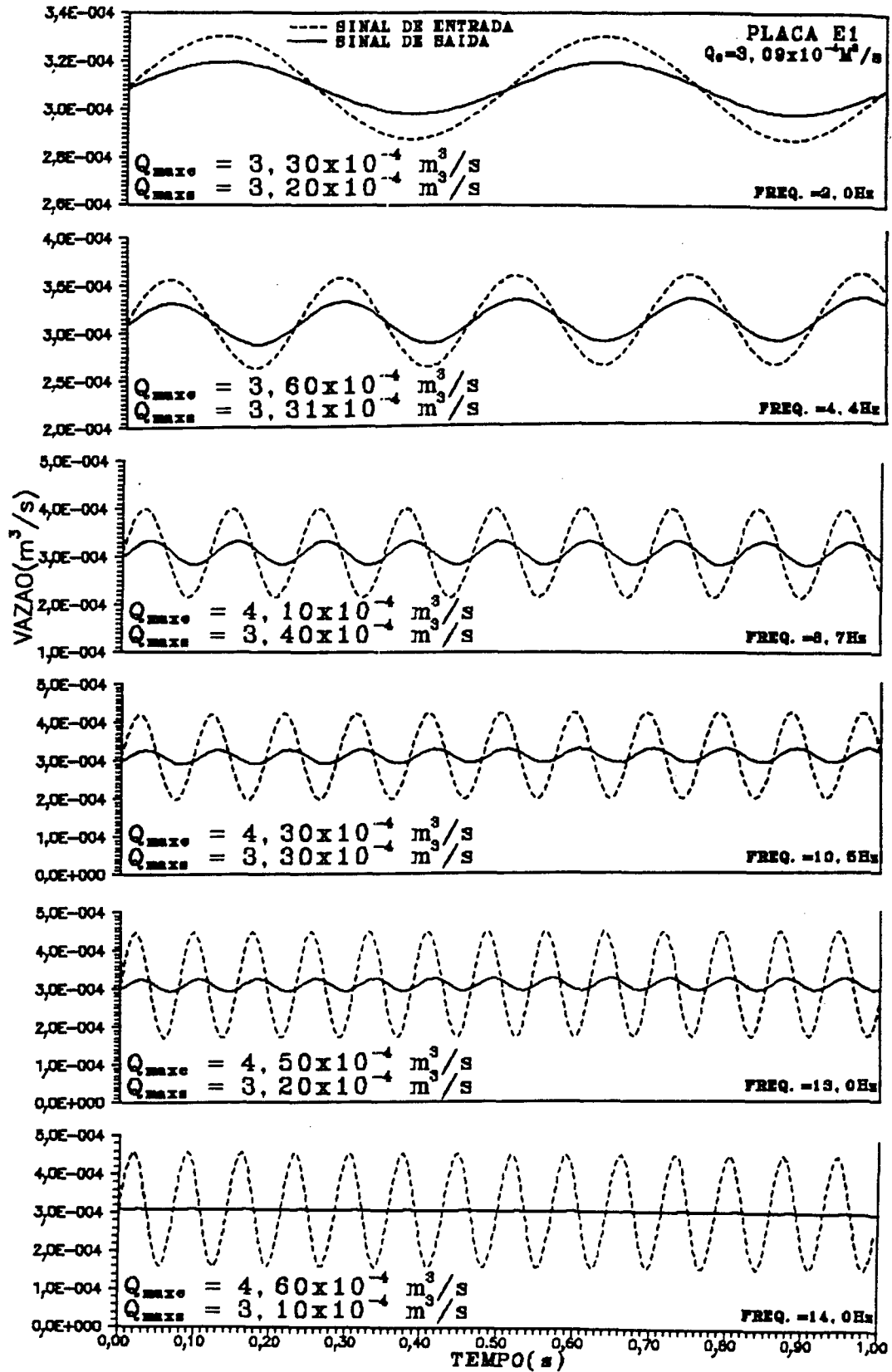


Fig. 7.22 - Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido pelo modelo analítico para uma vazão média de $3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

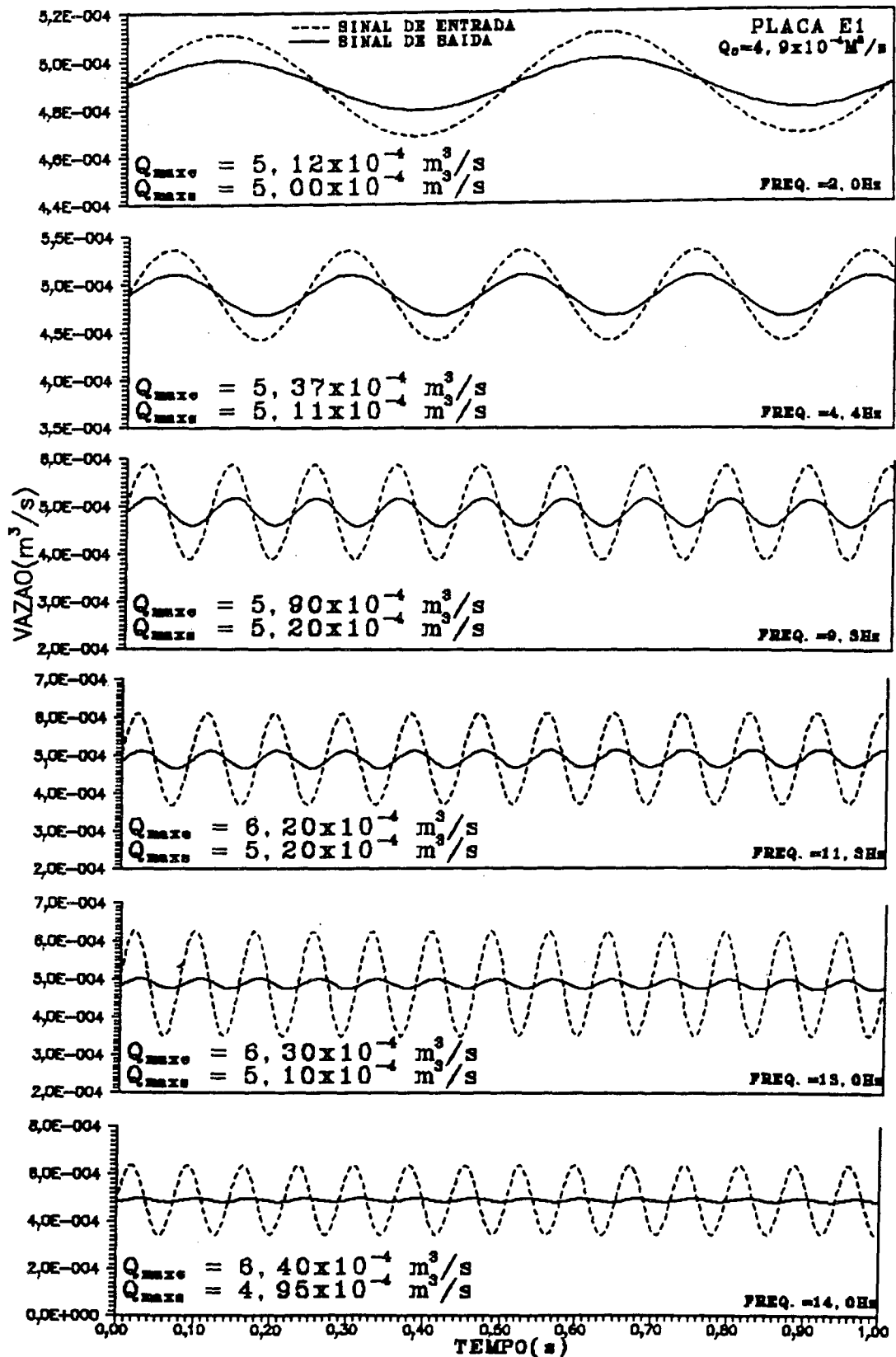


Fig. 7.23 - Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido pelo modelo analítico para uma vazão média de $4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

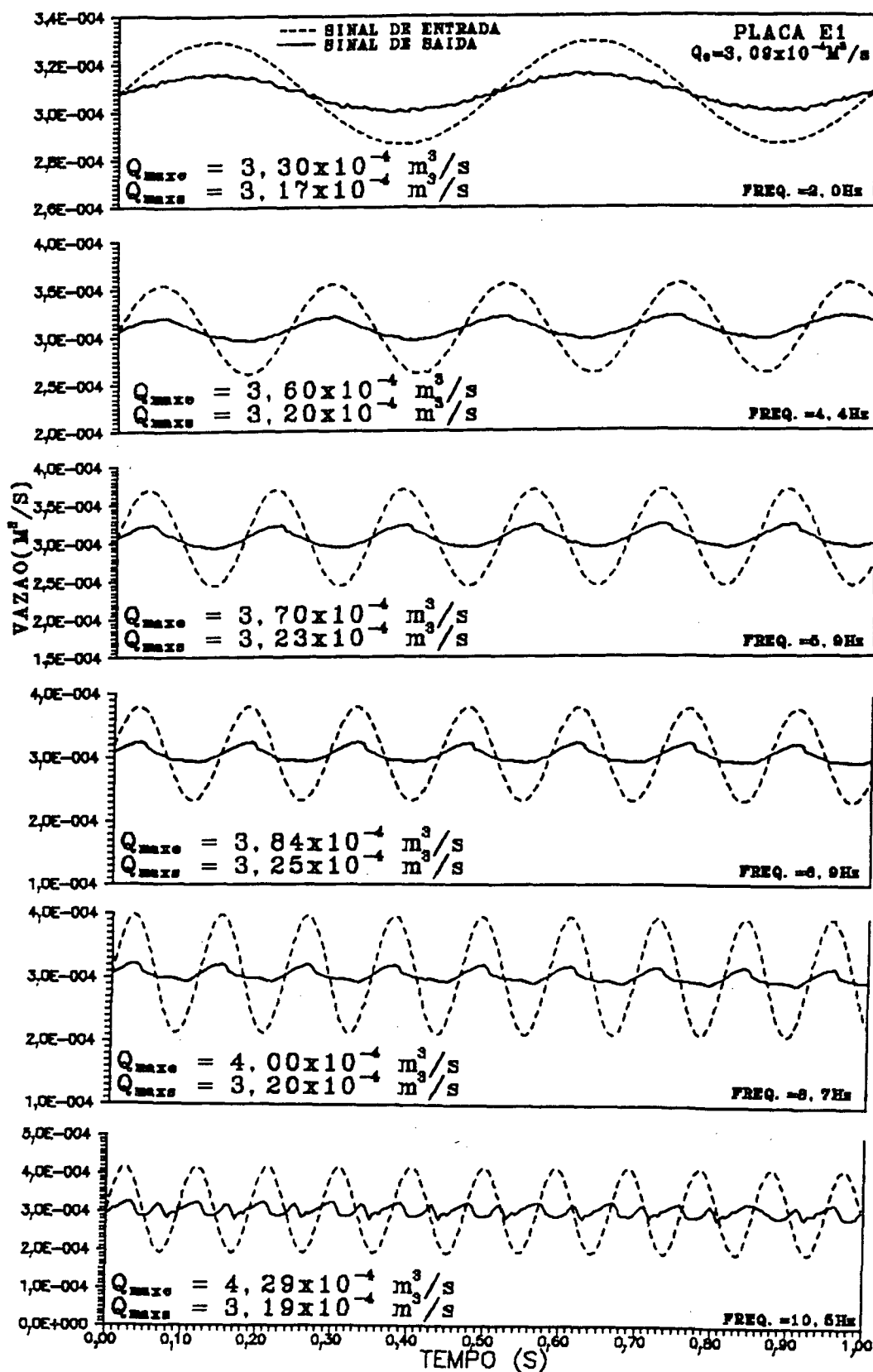


Fig. 7.24 - Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido experimentalmente para uma vazão média de $3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

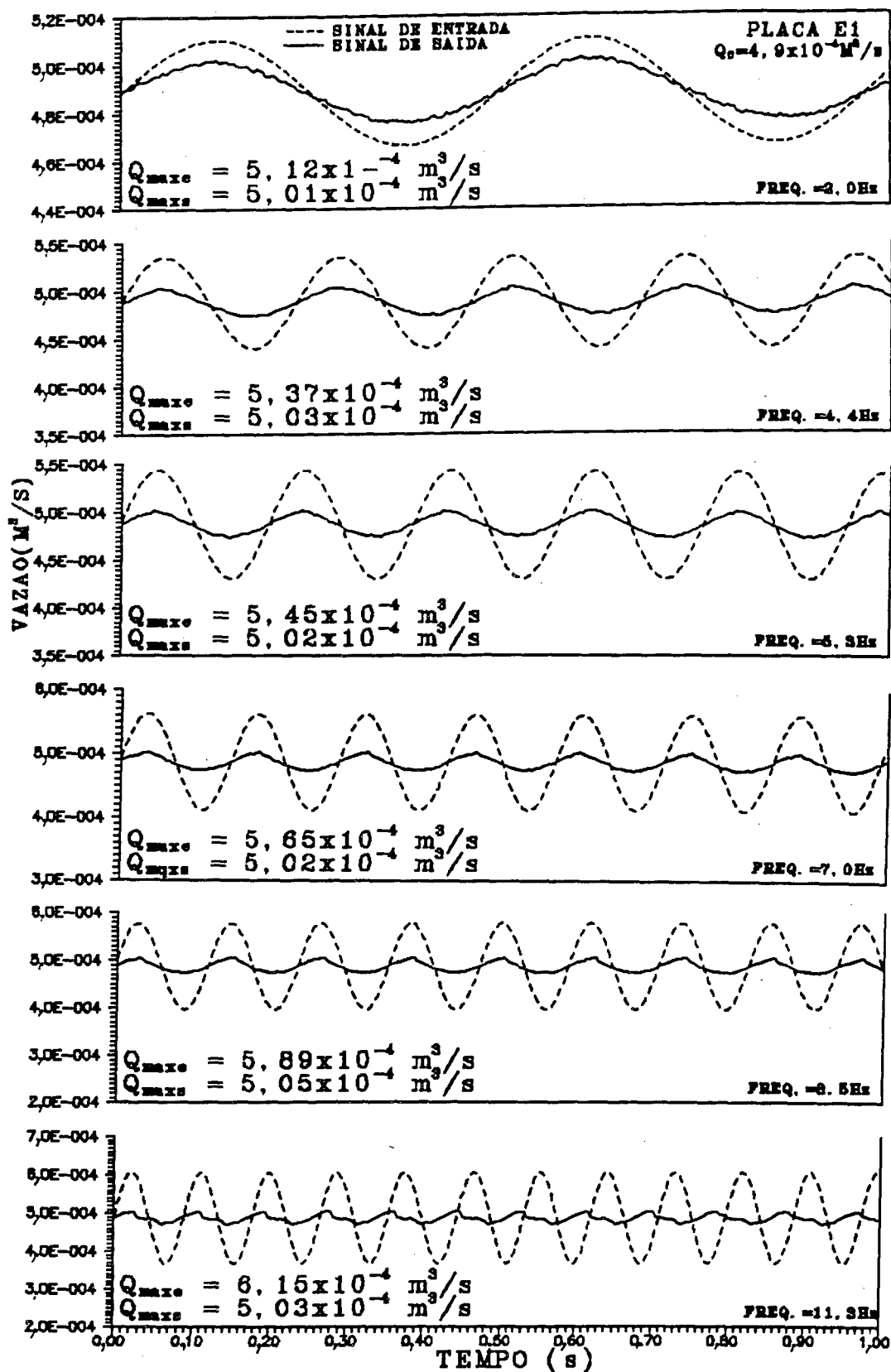


Fig. 7.25 - Amortecimento do pulso de vazão com a frequência, obtido experimentalmente para uma vazão média de $4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$.

Para o amortecimento obtido experimentalmente (Figs. 7.24 e 7.25), o sinal de entrada é o mesmo, ou seja, o pulso não amortecido dado pela Eq. 3.10. No entanto, o sinal de saída representa o pulso de vazão obtido através dos gradientes de pressão dinâmicos medidos experimentalmente na placa, dado pela Eq. 3.39.

Tanto para o modelo analítico como para a metodologia experimental, as Figs. 7.22 a 7.25 mostram que a fase é pequena até frequências compreendidas entre 5 a 6 Hz. A partir destas frequências o aumento da fase torna-se mais acentuado, até a destruição total do pulso. As Figs. 7.22 e 7.23 mostram também que, para as condições utilizadas no presente trabalho, o pulso de vazão obtido pelo modelo analítico é totalmente amortecido para frequências próximas dos 14 Hz. As Figs. 7.24 e 7.25 mostram que o pulso experimental é parcialmente destruído a partir de frequências em torno de 8 Hz. Para frequências maiores, devido a detalhes construtivos e principalmente a vibrações do sistema, o pulso começa a ser distorcido, afastando-se da forma senoidal. Para a vazão média de $3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, por exemplo, frequências de até 10,5 Hz foram conseguidas. No entanto o pulso de vazão obtido para esta frequência limite se sobrepõe a uma frequência da mesma ordem de grandeza, resultante das vibrações do sistema, eliminando as características desejadas para o pulso de vazão (Fig. 7.24). Quando a vazão média é aumentada, o correspondente aumento de pressão do sistema torna a geração do pulso experimental mais estável. Para a vazão média de $4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$, por exemplo, frequências de até 9,3 Hz foram conseguidas sem que as vibrações do sistema se sobrepusessem ao pulso. Tal como mostrado na Fig. 7.25, para este caso, as vibrações do sistema começam a se sobrepor ao pulso de vazão quando se atingem frequências perto dos 11,3 Hz. Testes com vazões médias maiores mostraram, experimentalmente, uma melhor estabilidade na geração do pulso de vazão, aproximando-se melhor do modelo analítico. No entanto devido a disponibilidade de equipamentos e problemas no sistema de aquisição de dados, não são apresentados resultados para vazões médias

maiores. Pode-se afirmar que as discrepâncias existentes entre o pulso gerado pelo modelo analítico e o obtido experimentalmente podem ser drasticamente reduzidas eliminando-se as vibrações do sistema e trabalhando-se com níveis maiores de pressão. No presente trabalho, devido à falta de equipamento e local adequado, assim como também pelo fato de ter usado acrílico como material das tubulações, não foi possível melhorar estas duas condições.

Uma vez descritas as características gerais do escoamento pulsante, gerado tanto pelo modelo analítico como pela metodologia experimental, parte-se agora para a descrição e corroboração dos principais parâmetros obtidos por estas duas metodologias. Para isto, todos os resultados apresentados a seguir referem-se apenas a uma das vazões médias utilizadas na placa E1 ($Q_0 = 3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$). As Figs. 7.26 e 7.27 mostram a comparação do ganho e da fase, respectivamente, para a faixa de frequências utilizadas experimentalmente. Nota-se que, para toda a faixa de frequências utilizada, o ganho e a fase experimental são menores do que os obtidos pelo

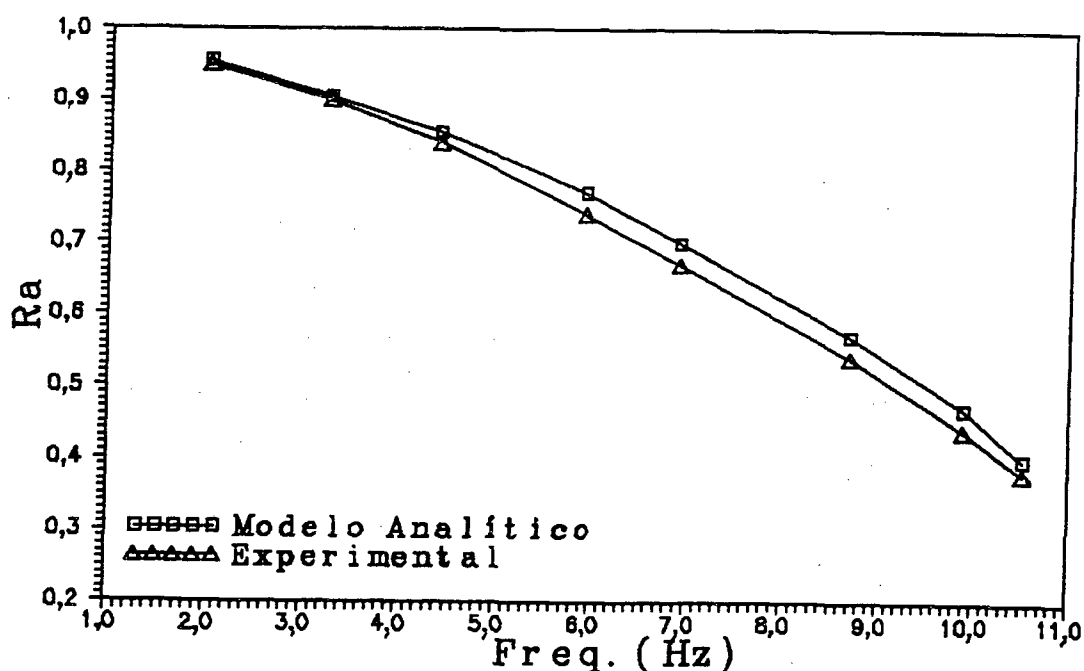


Fig. 7.26 - Variação do ganho com a frequência de trabalho.

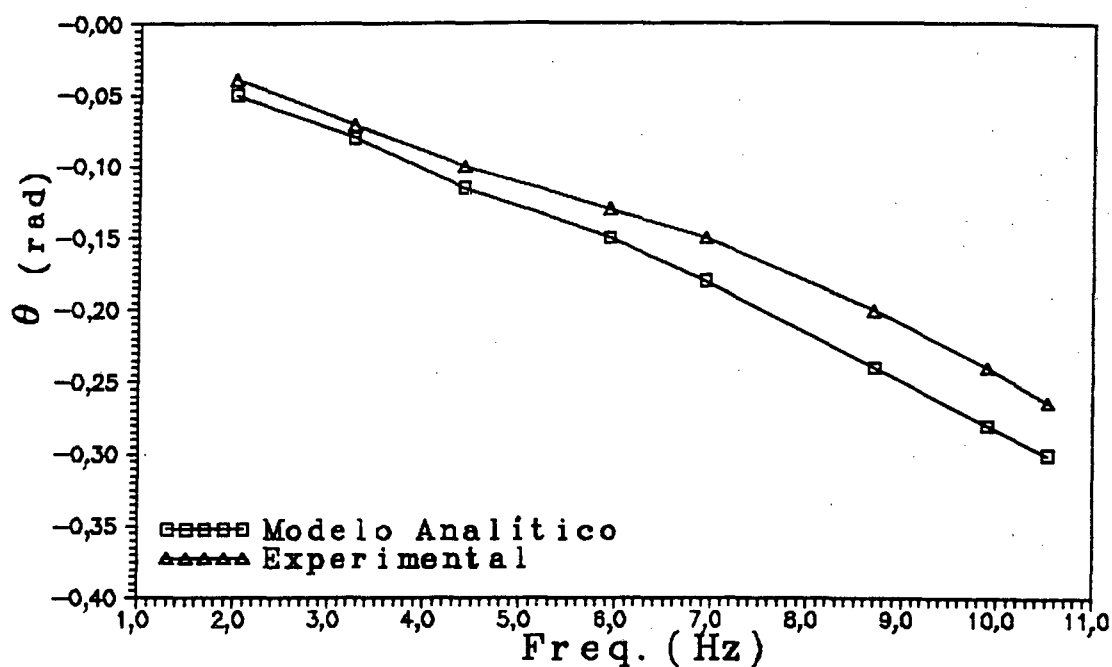


Fig. 7.27 - Variação da fase com a frequência de trabalho.

modelo analítico, indicando que o pulso é realmente mais amortecido do que o previsto pelo modelo analítico, embora o comportamento das curvas seja similar. Desta forma, pode-se concluir que, embora não se tenham conseguido frequências experimentais acima dos 11 Hz, o amortecimento total do pulso experimental deve acontecer perto dos 14 Hz, tal como previsto pelo modelo analítico.

As Figs. 7.28 a 7.36 mostram o amortecimento do pulso de vazão para as mesmas frequências. Em todos os casos, a vazão teórica representa o sinal de entrada do sistema, dado pela Eq. 3.10. Tal como previsto pela comparação dos ganhos, em todos os casos, o modelo analítico apresenta um menor amortecimento do pulso de vazão, em torno de 1 a 5%.

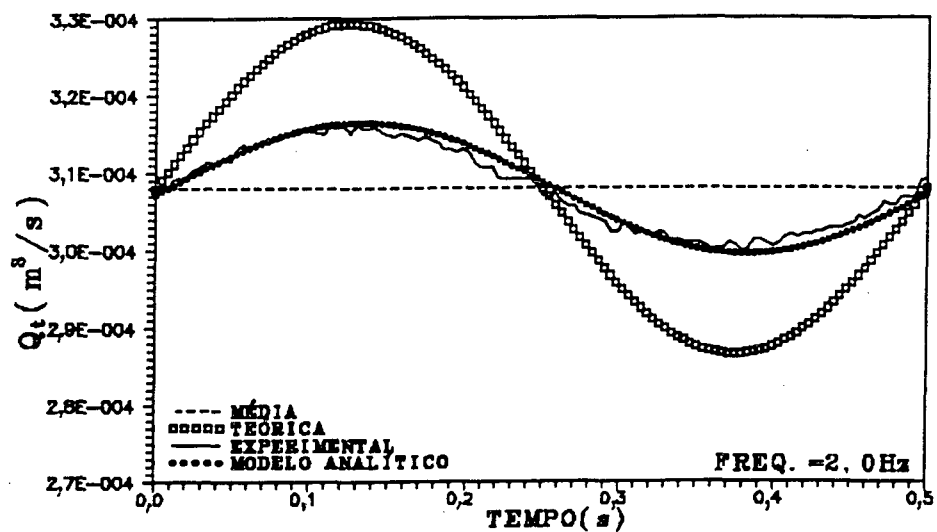


Fig. 7.28 - Flutuação de vazão para uma frequência de 2,0 Hz

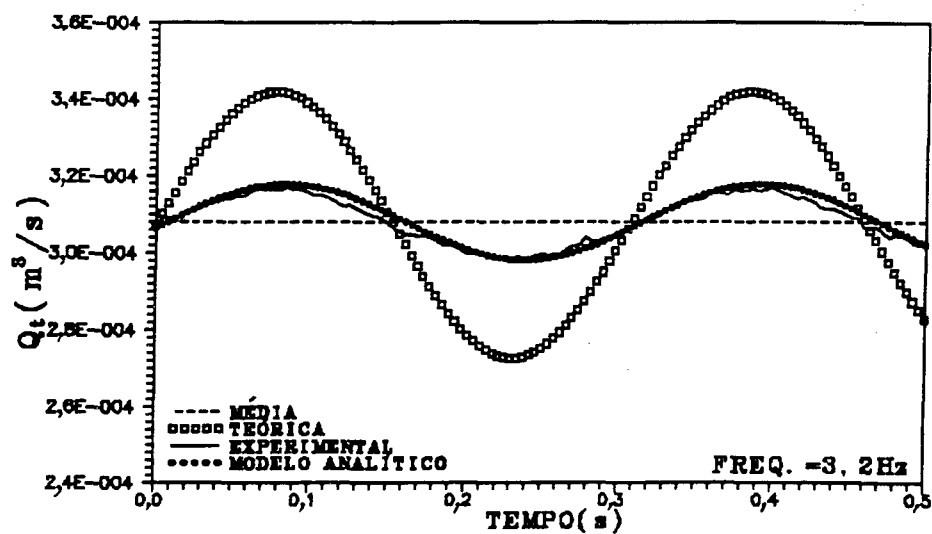


Fig. 7.29 - Flutuação de vazão para uma frequência de 3,2 Hz

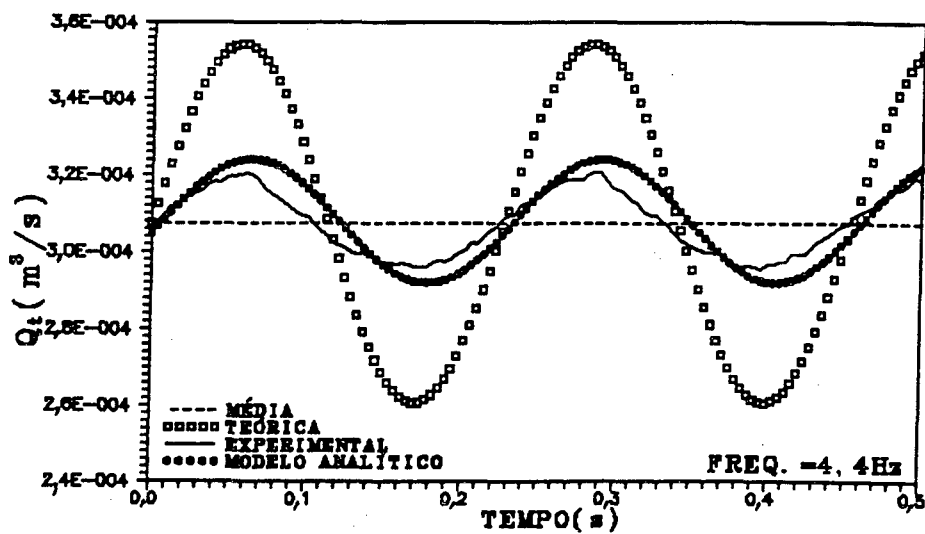


Fig. 7.30 - Flutuação de vazão para uma frequência de 4,4 Hz

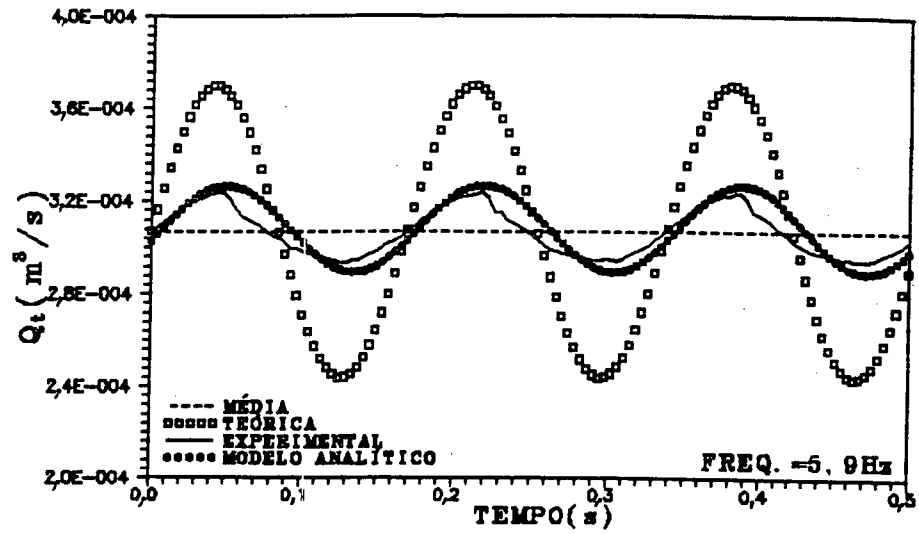


Fig. 7.31 - Flutuação de vazão para uma frequência de 5,9 H

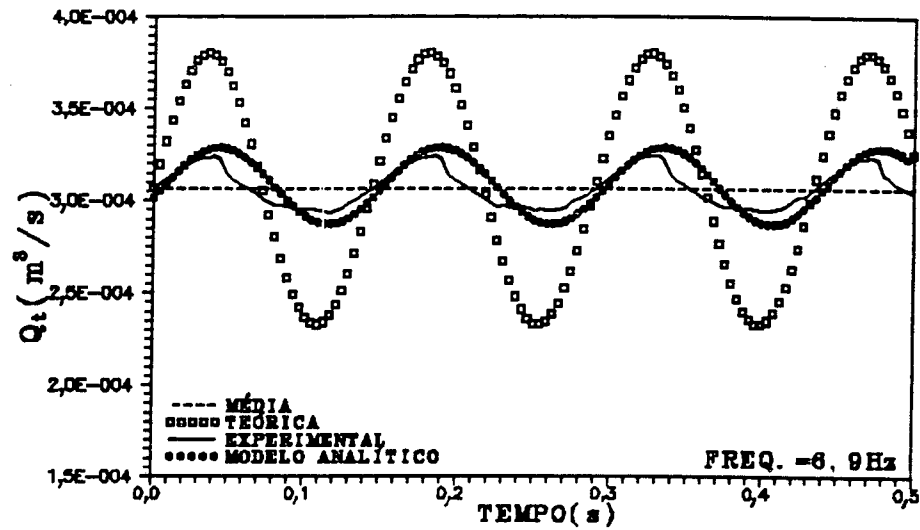


Fig. 7.32 - Flutuação de vazão para uma frequência de 6,9 Hz

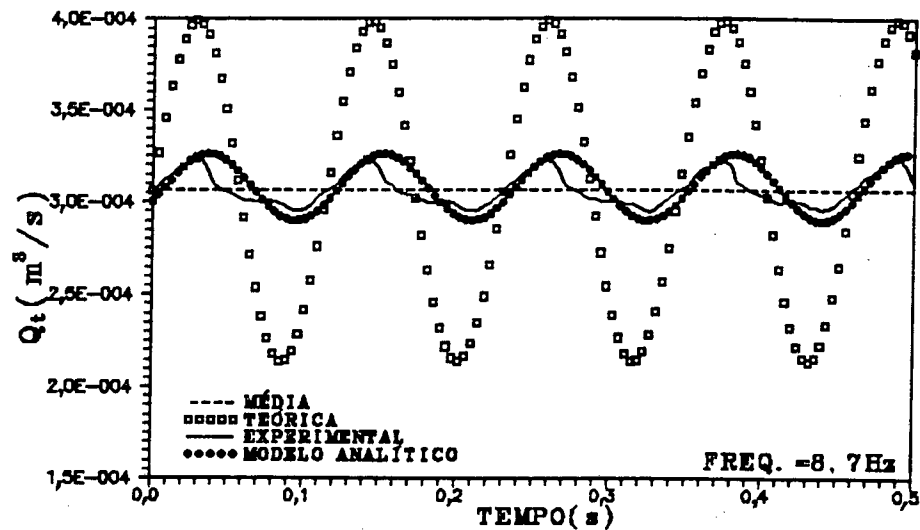


Fig. 7.33 - Flutuação de vazão para uma frequência de 8,7 H

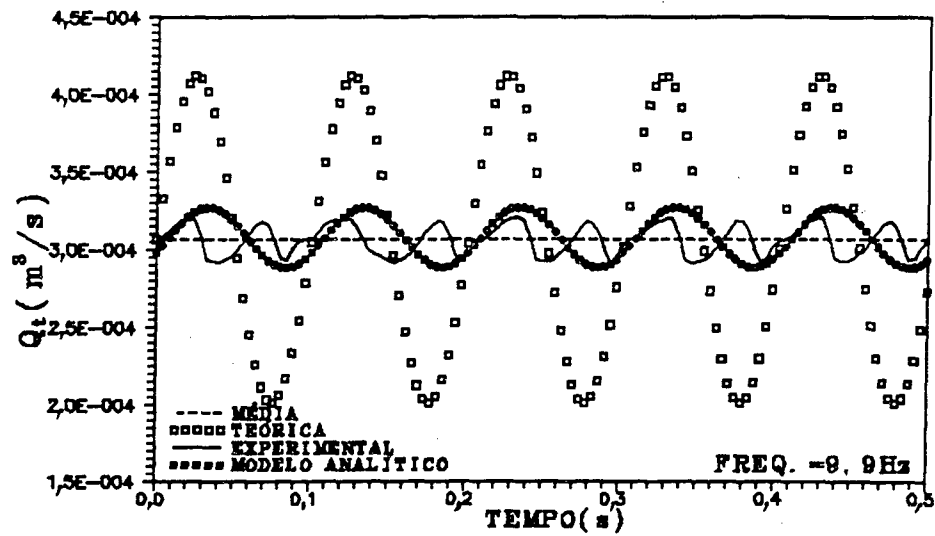


Fig. 7.34 - Flutuação de vazão para uma frequência de 9,9 Hz

A Fig. 7.34 mostra claramente o efeito da vibração do sistema para frequências acima de 9,0 Hz. Neste caso, uma outra frequência de amplitude um pouco menor se sobrepõe ao pulso de vazão gerado experimentalmente, enquanto que o pulso de vazão calculado pelo modelo analítico conserva plenamente o seu comportamento senoidal. Para frequências acima de 9 Hz, o pulso experimental já está totalmente deformado, não representando mais uma senóide.

As Figs. 7.35 e 7.36 representam as flutuações de vazão para vazões médias maiores na mesma placa.

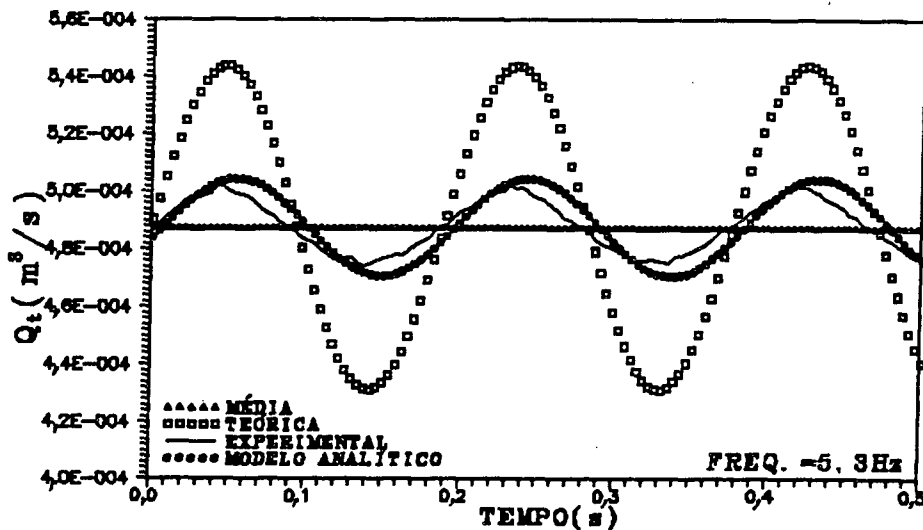


Fig. 7.35 - Flutuação de vazão para uma vazão média de $4,9 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ e frequência de 5,3 Hz

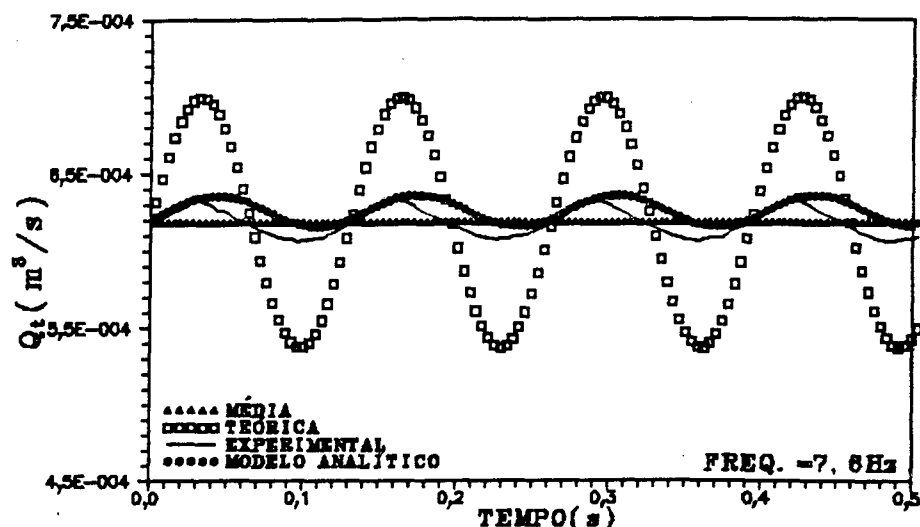


Fig. 7.36 - Flutuação de vazão para uma vazão média de $6,2 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$ e frequência de 7,6 Hz.

7.3.3 - Resultados Numéricos X Experimentais

Aqui, as vazões obtidas experimentalmente são utilizadas como dados de entrada no programa computacional. Desta forma, obtém-se numericamente os gradientes de pressão na placa de orifício, os quais são utilizados para o cálculo das vazões numéricas, que constituem o sinal de saída do sistema, e dos coeficientes de vazão. Note que para a validação do modelo numérico é suficiente apenas a comparação dos gradientes de pressão com os valores experimentais. No entanto, as vazões instantâneas e os coeficientes de vazão são também comparados com os valores experimentais.

As Figs. 7.37 a 7.43 mostram os respectivos gradientes de pressão utilizados para o cálculo das vazões dinâmicas. As Figs. 7.37 a 7.41 mostram que os valores obtidos com o modelo numérico incompressível aproximam-se melhor dos resultados experimentais. Ao mesmo tempo, nota-se que para estas frequências, o maior afastamento entre os valores numéricos e experimentais

ocorre para as velocidades negativas do pistão, principalmente no ponto de velocidade máxima. A partir de uma frequência de 6,9 Hz (Fig. 7.41) o pulso de pressão começa a se afastar mais acentuadamente da forma senoidal, principalmente na descompressão do sistema, formando-se um achatamento no ponto de velocidade máxima negativa do pistão. Quando frequências de 9,9 Hz são atingidas (Fig. 7.43) o pulso de pressão aparece superposto a uma outra frequência proveniente das vibrações do sistema, distorcendo totalmente a flutuação.

A metodologia numérica mostra que para frequências acima de 6,9 Hz torna-se bem mais difícil a convergência do modelo incompressível, oscilando sem convergir para frequências um pouco maiores. Por outro lado, o modelo compressível converge para frequências acima de 6,9 Hz, embora o pulso gerado experimentalmente, e usado como dado de entrada no programa computacional, seja distorcido para estas frequências. As Figs. 7.42 e 7.43 mostram os resultados numéricos obtidos pelo modelo compressível, para frequências de 8,7 e 9,9 Hz, respectivamente. Nota-se que os valores numéricos obtidos reproduzem os dados experimentais mesmo que o pulso de vazão utilizado como condição de contorno tenha alguma distorção.

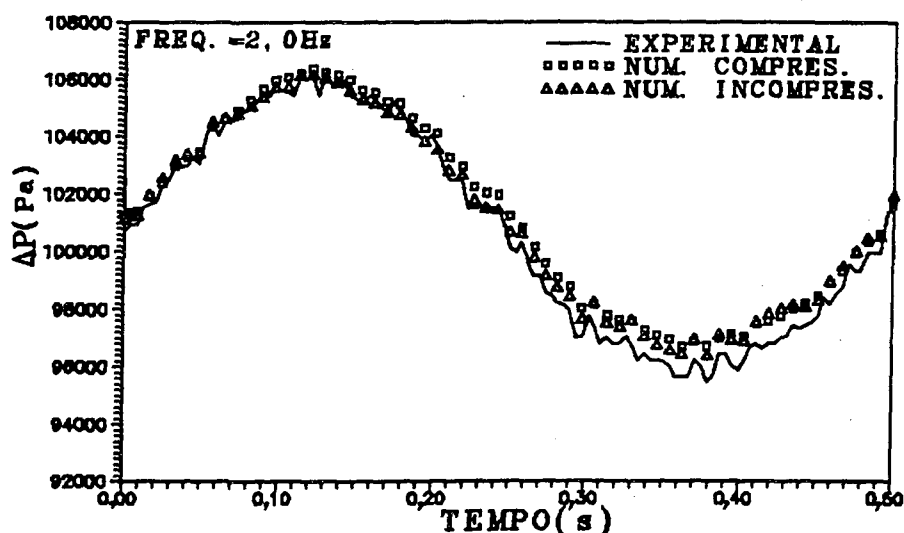


Fig. 7.37 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 2,0 Hz.

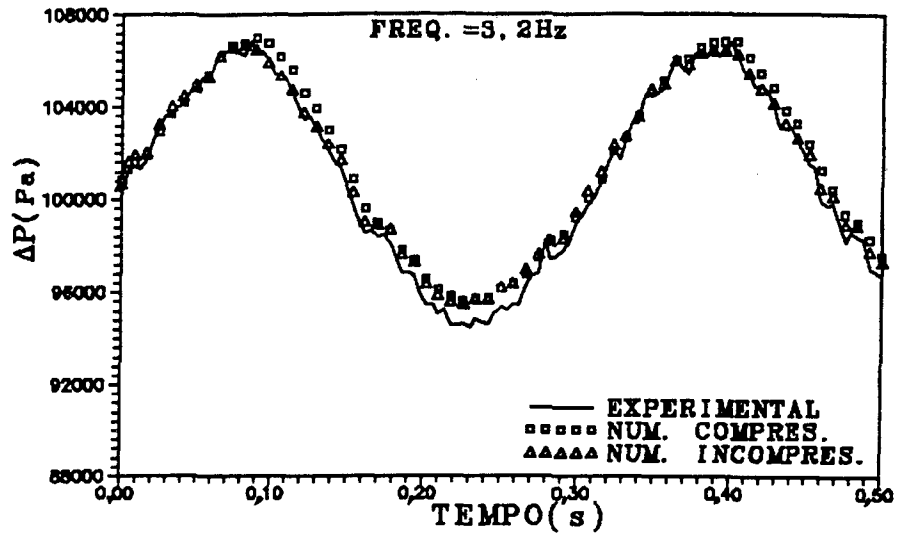


Fig. 7.38 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 3,2 Hz.

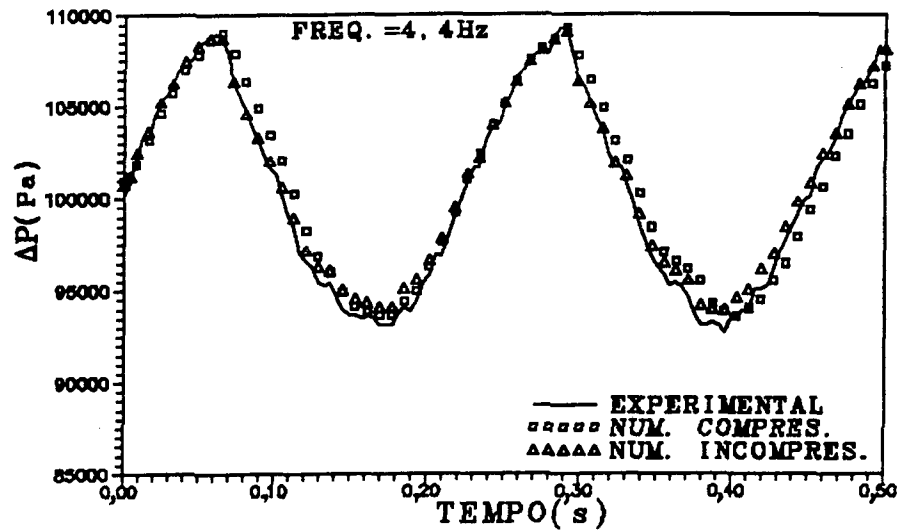


Fig. 7.39 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 4,4 Hz.

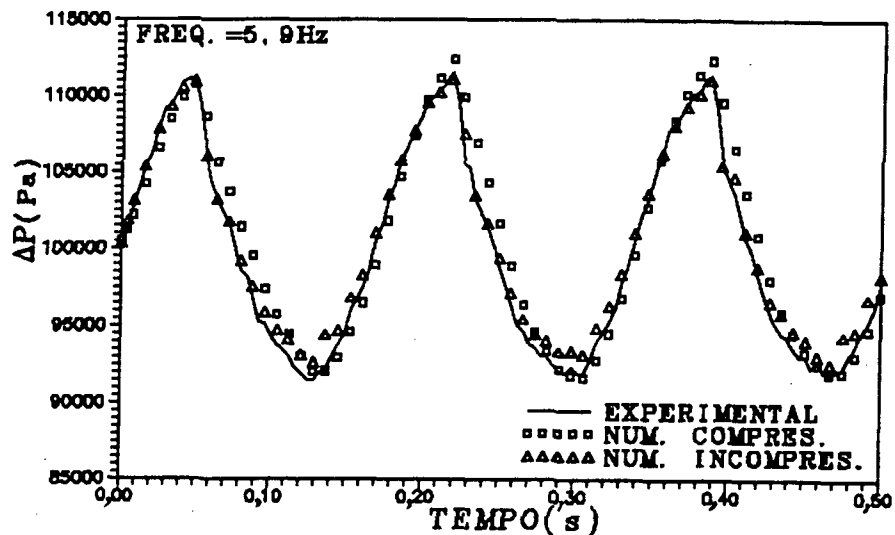


Fig. 7.40 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 5,9 Hz.

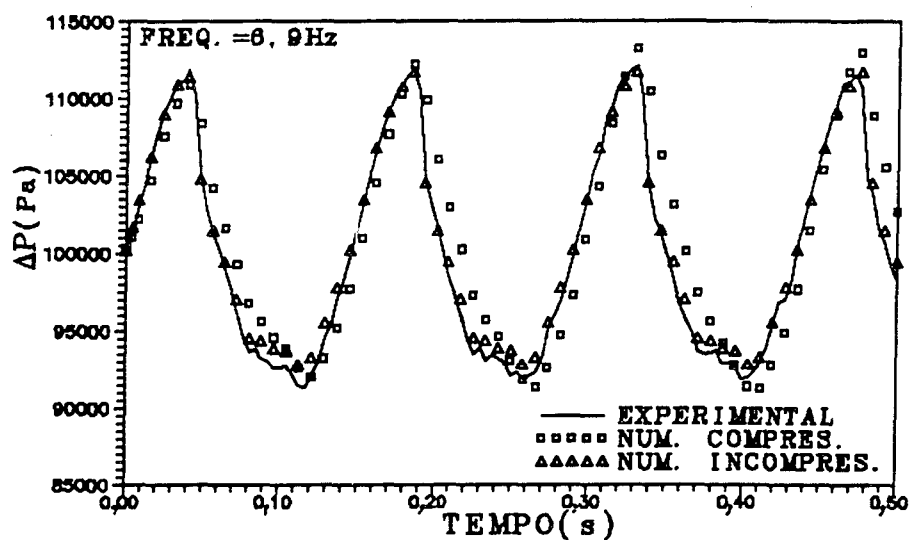


Fig. 7.41 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 6,9 Hz.

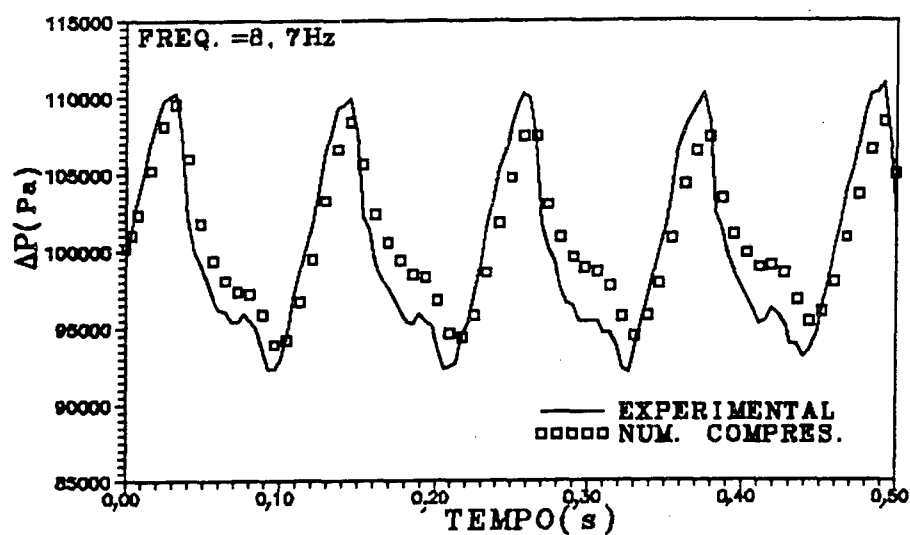


Fig. 7.42 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 8,7 Hz.

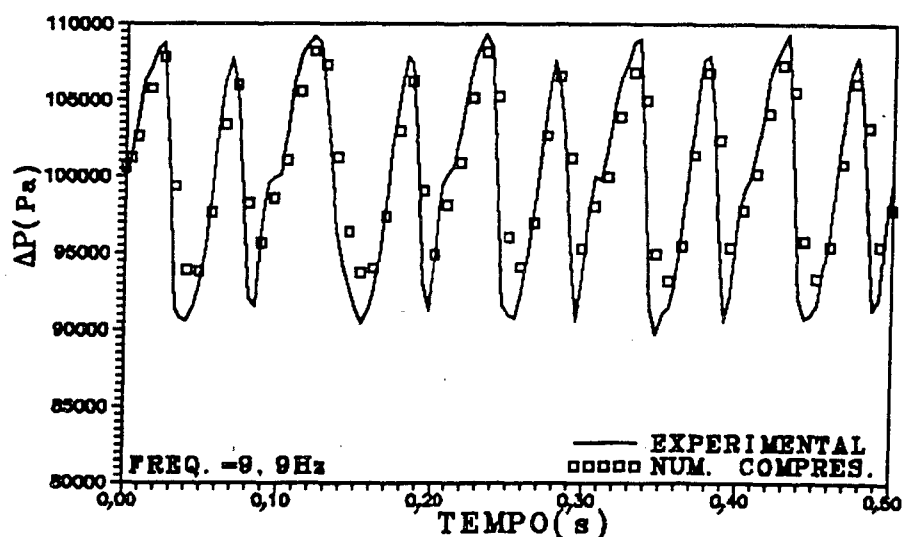


Fig. 7.43 - Gradientes de pressão na placa para uma frequência de 9,9 Hz.

Para as mesmas frequências de trabalho, as Figs. 7.44 a 7.50 mostram o comportamento dos coeficientes de vazão dinâmicos numa escala ampliada. Novamente, os valores numéricos são os obtidos utilizando-se as vazões experimentais como entrada no programa computacional. As Figs. 7.46 a 7.48 mostram que os coeficientes de vazão experimentais são reproduzidos fielmente pela metodologia numérica incompressível, apresentando um pequeno afastamento apenas para velocidades negativas do pistão, principalmente nas proximidades dos pontos de velocidade máxima. Por outro lado, os coeficientes de vazão obtidos para o escoamento compressível são sempre maiores do que os valores experimentais e, conseqüentemente, maiores que os valores obtidos pelo programa incompressível. Isto é facilmente explicado pelo fato dos coeficientes de vazão terem sido calculados a partir da equação de Bernoulli. A equação de Bernoulli é desenvolvida admitindo-se a incompressibilidade do escoamento, o que permite simplificar as equações e obter facilmente os coeficientes de vazão como função dos gradientes de pressão e das dimensões do orifício.

No caso de escoamentos compressíveis, a massa específica do fluido é uma função da temperatura e da pressão em cada seção do escoamento. Como neste caso, o escoamento é isotérmico, a massa específica é função apenas da pressão em cada seção. Para o escoamento compressível deve-se, então, introduzir um coeficiente que leve em conta este fenômeno. Na prática, para se encontrar este coeficiente é necessário recorrer à equação da energia, admitindo-se que qualquer mudança de estado entre duas seções é isentrópica reversível (adiabática). Desta forma, este coeficiente depende da relação de diâmetros d/D , da relação dos calores específicos do fluido c_p/c_v e da relação das pressões P_2/P_1 . O desenvolvimento completo para a obtenção dos coeficientes de expansão isentrópicos para escoamentos compressíveis pode ser visto em Delmée [2]. No presente trabalho estes valores podem ser obtidos diretamente através da relação dos coeficientes de vazão. É importante lembrar que as Figs. 7.54 a 7.62 mostram os coeficientes de vazão numa escala

ampliada, indicando diferenças apenas na quarta casa decimal. Desta forma, estas variações nos coeficientes de vazão não são suficientes para produzir diferenças notáveis nas vazões instantâneas obtidas, para a faixa de frequências utilizada.

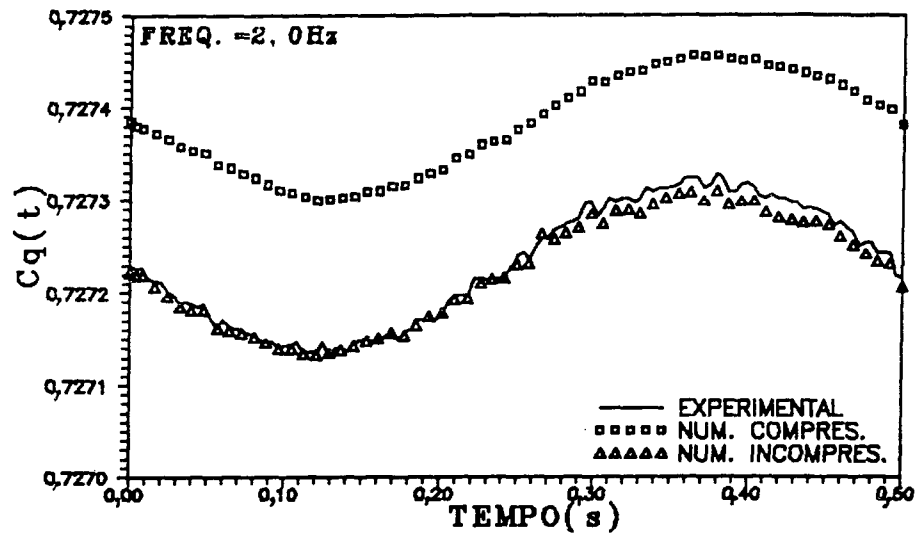


Fig. 7.44 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 2,0 Hz.

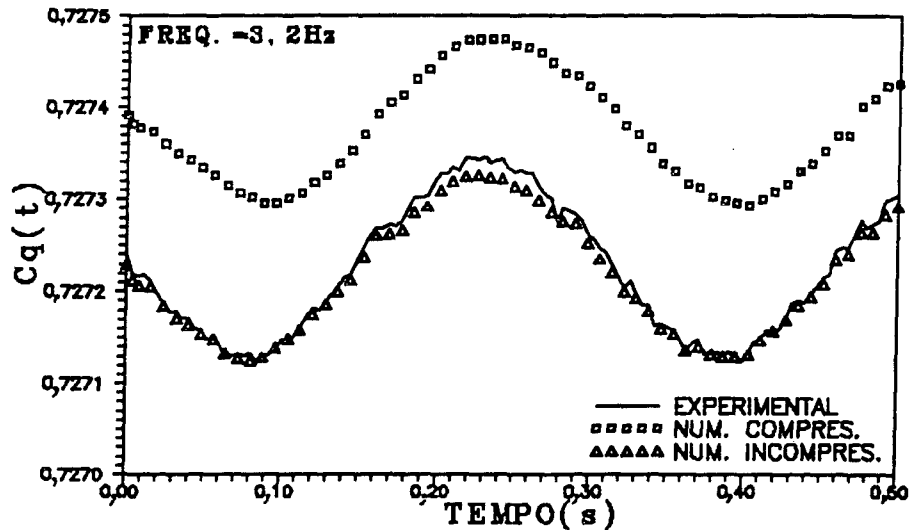


Fig. 7.45 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 3,2 Hz.

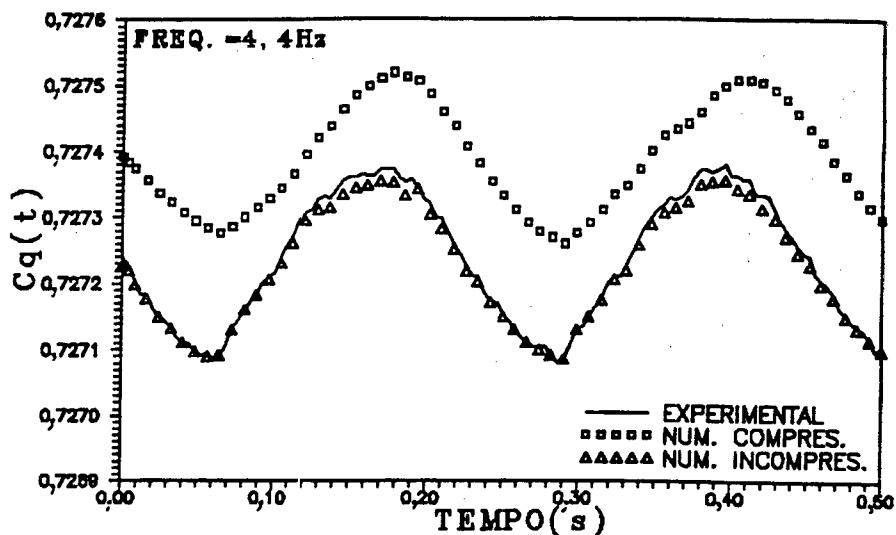


Fig. 7.46 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 4,4 Hz.

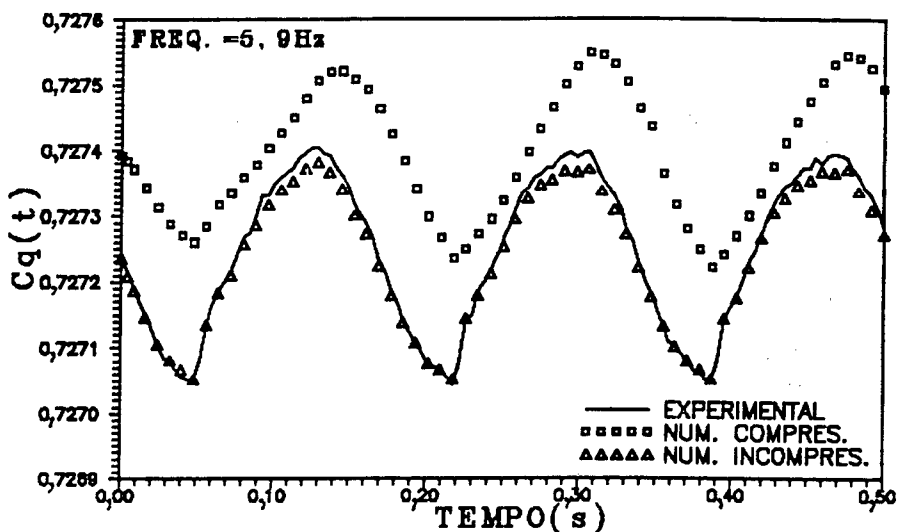


Fig. 7.47 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 5,9 Hz.

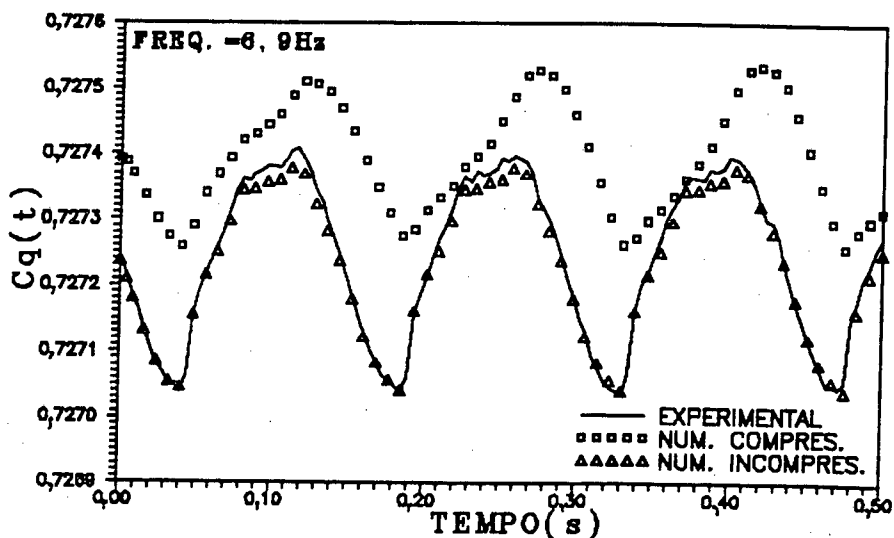


Fig. 7.48 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 6,9 Hz.

Como não houve convergência do modelo incompressível para frequências acima de 6,9 Hz, as Figs. 7.49 e 7.50 mostram apenas os coeficientes de vazão para o escoamento compressível, comparando-os com os dados experimentais. Observa-se claramente a distorção do pulso de vazão experimental na frequência de 8,7 Hz (Fig. 7.49) e o aparecimento da superposição das vibrações do sistema ao atingir 9,9 Hz (Fig. 7.50).

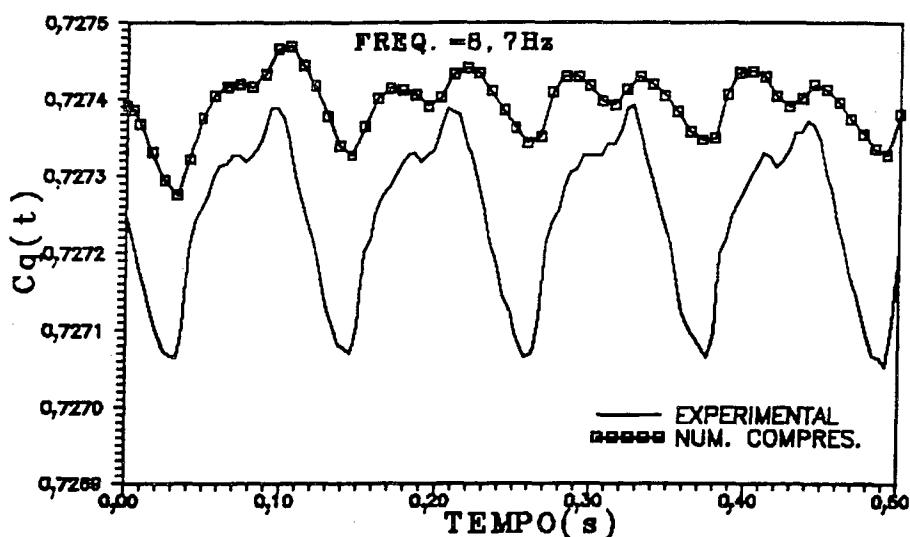


Fig. 7.49 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 8,7 Hz.

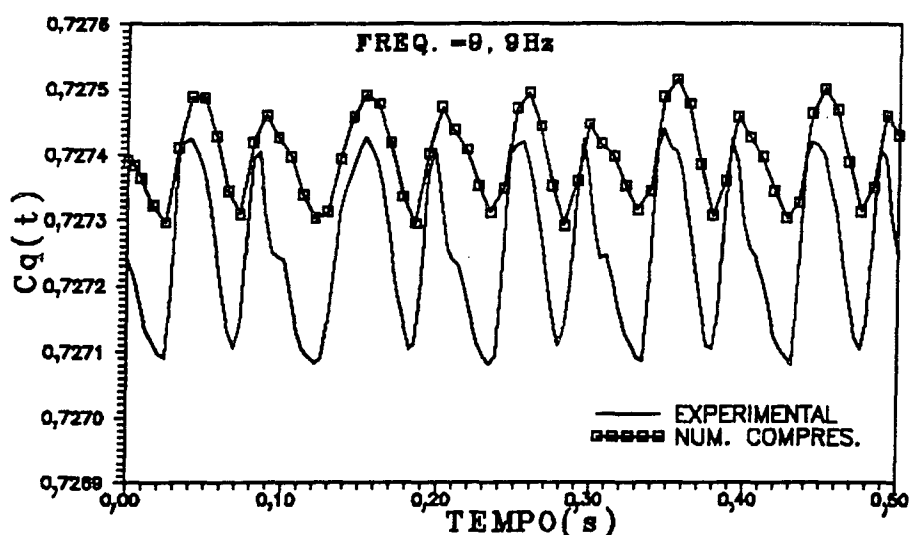


Fig. 7.50 - Coeficientes dinâmicos de vazão para uma frequência de 9,9 Hz.

A dificuldade de convergência do modelo numérico incompressível com o aumento da frequência, ligado ao fato da diferença obtida nos coeficientes de vazão, quando comparados com os respectivos valores compressíveis, torna evidente que, do ponto de vista numérico, o escoamento pulsante estudado deve ser tratado como um escoamento compressível mesmo que as velocidades sejam baixas e o fluido de trabalho seja um líquido. É importante salientar que estas discrepâncias obtidas nos coeficientes de vazão não se traduzem em grandes diferenças no módulo do pulso de vazão, neste caso. No entanto, para frequências maiores ou fluidos com características mais compressíveis, ou mesmo para aumentar a precisão quando necessário, esta influência da compressibilidade deve ser considerada.

As Figs. 7.51 a 7.57 mostram a flutuação de vazão obtida utilizando-se os gradientes de pressão calculados numericamente. Novamente, as condições de contorno de entrada no programa computacional são as vazões experimentais e a vazão teórica representa o sinal de entrada do sistema (Eq. 3.10). Note que, praticamente, não há diferença entre as vazões numéricas (compressível e incompressível) e as experimentais, reafirmando o fato de que as diferenças encontradas nos coeficientes de vazão são relativamente pequenas. À medida que a frequência aumenta o pulso de vazão experimental tende a se deformar, devido aos efeitos das vibrações do sistema, tal como previsto anteriormente.

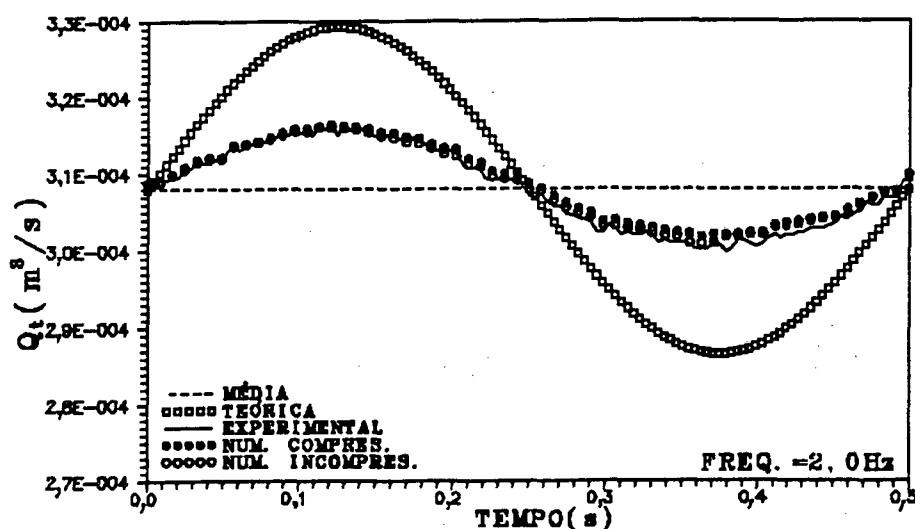


Fig. 7.51 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 2,0 Hz.

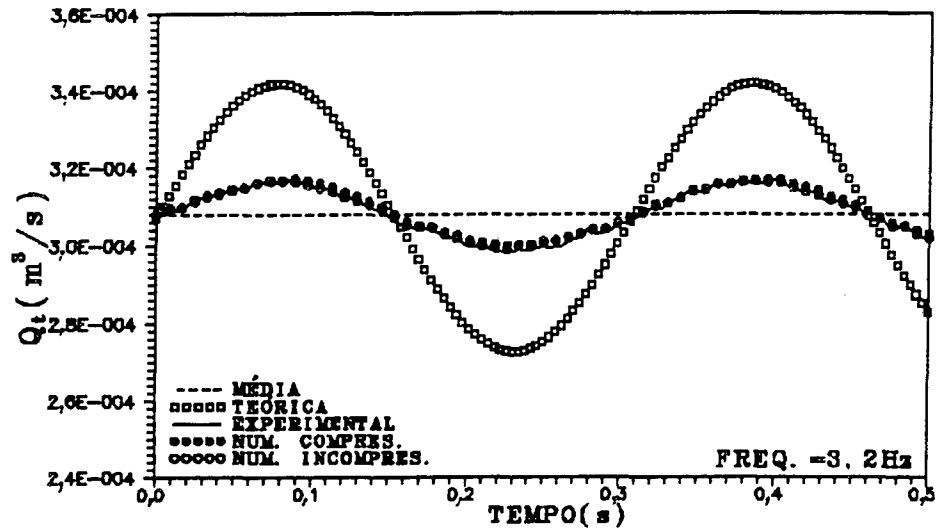


Fig. 7.52 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 3,2 Hz.

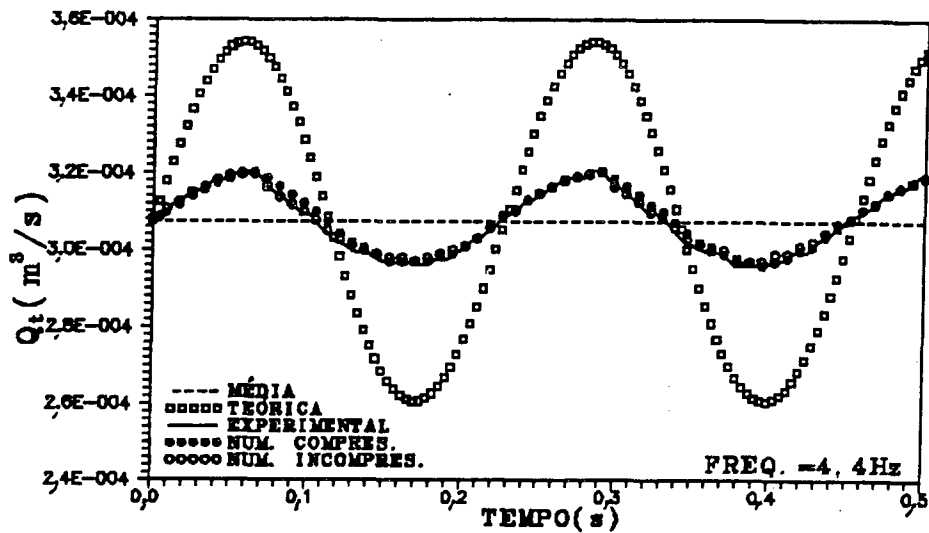


Fig. 7.53 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 4,4 Hz.

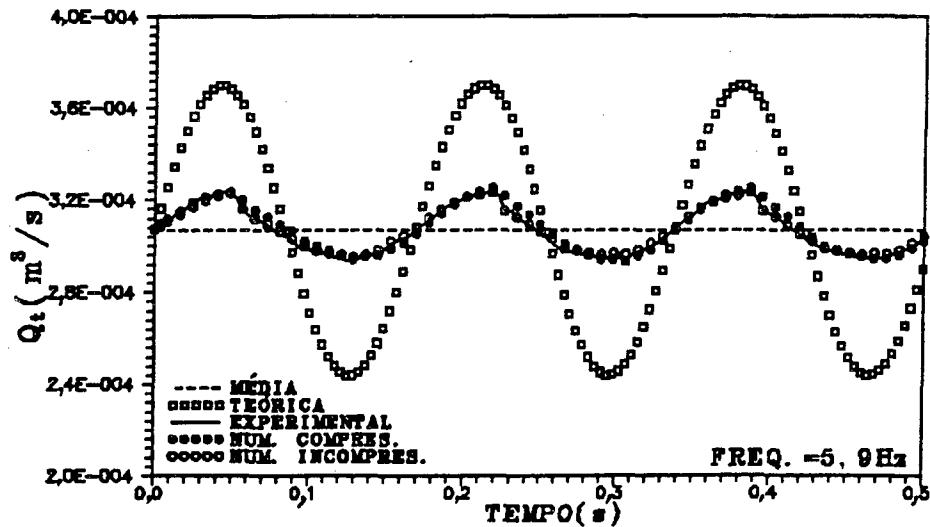


Fig. 7.54 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 5,9 Hz.

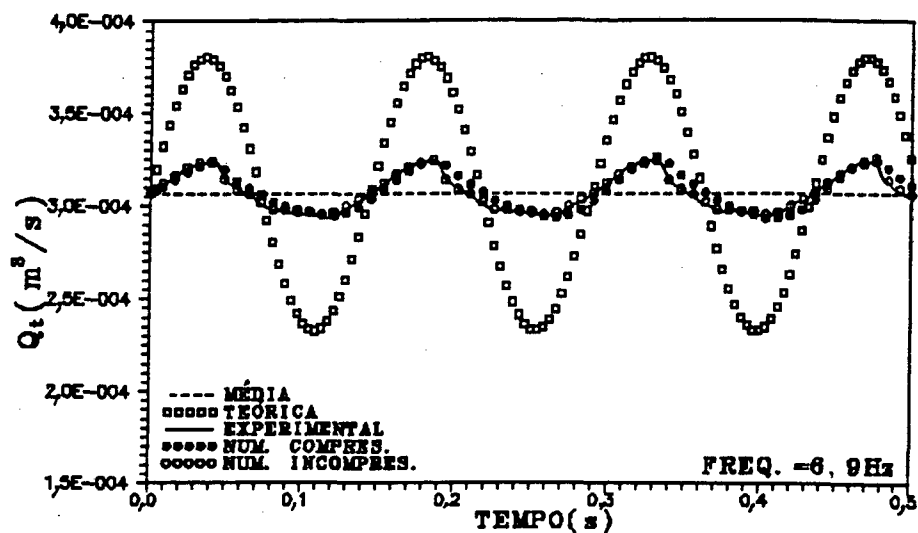


Fig. 7.55 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 6,9 Hz.

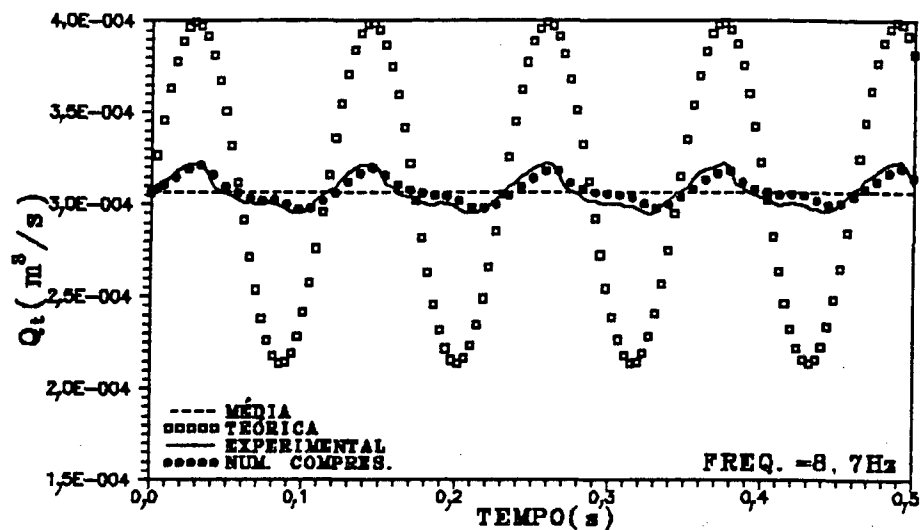


Fig. 7.56 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 8,7 Hz.

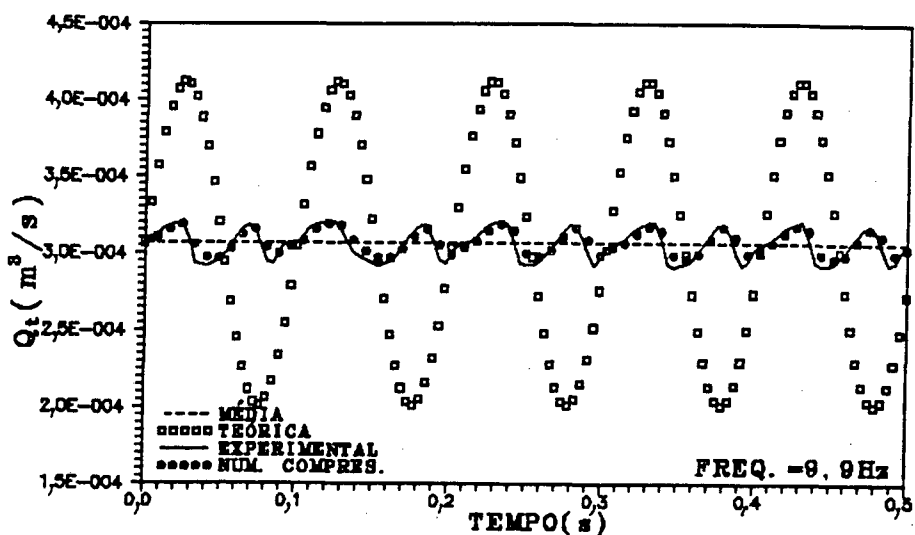


Fig. 7.57 - Flutuação de vazão gerada para uma frequência de 9,9 Hz.

As Figs. 7.56 e 7.57 não apresentam resultados para o modelo numérico incompressível, pelos problemas de convergência já expostos anteriormente, mas mostram uma boa reprodução dos dados experimentais através da metodologia numérica compressível

Os resultados apresentados no presente capítulo mostram que a metodologia numérica é capaz de reproduzir todos os parâmetros característicos de um sistema de medição de vazão estática ou dinâmica. Por outro lado, o modelo analítico desenvolvido é capaz de prever o comportamento de uma flutuação de vazão, dentro de uma certa margem de erro. Estas duas metodologias constituem-se num modelo teórico completo que pode ser de grande utilidade na análise de escoamentos pulsantes, encontrados em muitas áreas da engenharia.

7.3.4 - Comentários

- 1) Da mesma forma que para o regime permanente, todos os resultados numéricos foram obtidos utilizando-se uma malha de 20 x 220 e um domínio de saída computacional suficiente para a aplicação da condição de contorno parabólica.
- 2) A convergência do programa numérico para o escoamento incompressível torna-se cada vez mais difícil com o aumento da frequência de flutuação do sistema, chegando até não convergir para frequências próximas dos 8 Hz.
- 3) Embora flutuações de vazão tenham sido obtidas experimentalmente para vazões médias maiores, os resultados utilizados para validação dos modelos analítico e numérico são os correspondentes à vazão média mínima ($Q_0 = 3,09 \times 10^{-4} \text{ m}^3/\text{s}$). Todos os demais resultados experimentais são apresentados no apêndice D.

4) Da mesma forma que para o regime permanente, os resultados transientes apresentados referem-se apenas à placa E1, de entrada cônica e com relação de diâmetro de 0,2.

5) Na construção do aparelho experimental para a obtenção dos dados transientes, alguns problemas de caráter construtivo e operacional foram constatados. Estes problemas, tais como vibrações do sistema devidos ao método de fixação dos dutos, torque não suficientemente elevado do motor de acionamento do gerador de pulsos de vazão, reduções de diâmetro entre o cilindro do gerador de pulsos e o sistema hidráulico, materiais das tubulações, pressões baixas de trabalho, etc., podem ter sido, em grande parte, os responsáveis pelas discrepâncias obtidas com o modelo analítico proposto. Acredita-se que somente o fato de trabalhar com níveis maiores de pressão, a eliminação das vibrações do sistema e a utilização de um motor com torque adequado aproximaria bem os resultados analíticos e experimentais, pelo menos para esta faixa de frequências.

6) O uso do modelo numérico teve como objetivo reproduzir os parâmetros característicos dos medidores de vazão. Estes parâmetros, obtidos do modelo analítico ou da metodologia experimental, tais como gradientes de pressão, vazões, coeficientes de vazão, razões de amplitude, etc., caracterizam qualquer sistema de medição de vazão do tipo pressão diferencial. Para isto uma condição de contorno conhecida, tal como velocidade ou vazão, proveniente de dados experimentais ou do modelo analítico é necessária. Os resultados mostraram claramente que a metodologia numérica apresentada é capaz de reproduzir os valores obtidos experimentalmente dentro da margem de erro desta última.

7) Da mesma forma que para o regime permanente, o tempo de CPU gasto na solução numérica do escoamento transiente depende do intervalo de tempo utilizado, da

frequência de pulsação e da geometria da placa utilizada. Como para o regime transiente apenas a placa E1 foi resolvida, o tempo de CPU foi apenas função da frequência utilizada. Neste caso, o intervalo de tempo não pode ser otimizado, já que o valor é lido diretamente dos dados experimentais, nos quais foi adotado um intervalo de tempo fixo para cada frequência. Nestas condições, os tempos de CPU gastos para cada ciclo do escoamento foram de aproximadamente 3800s para frequências de 2,0Hz, até 8000s para frequências perto dos 10Hz.

8 - CONCLUSÕES E RESUMO DAS CONTRIBUIÇÕES

8.1 - CONCLUSÕES

Pode-se afirmar que de um modo geral a metodologia numérica reproduz adequadamente os resultados experimentais, dentro da incerteza de medição obtida experimentalmente.

Para a obtenção dos resultados numéricos em regime permanente, observou-se que tanto a metodologia compressível como a incompressível reproduziram bem os resultados experimentais, obtendo-se discrepâncias dentro das incertezas de medição previstas experimentalmente.

Para o regime transiente, a metodologia incompressível aproximou-se melhor dos resultados experimentais para frequências de pulsação mais baixas. No entanto, à medida que as frequências aumentam, a convergência do programa torna-se cada vez mais difícil, para a mesma malha e intervalos de tempo utilizados. Por outro lado, a metodologia compressível é sempre mais estável em termos de convergência, embora os resultados mostrem discrepâncias um pouco maiores, mas sempre dentro da incerteza de medição obtida experimentalmente.

A metodologia numérica proposta no presente trabalho permite realizar a calibração estática, para baixos números de Reynolds, de qualquer medidor de vazão do tipo pressão diferencial (placa de orifício, bocal de fluxo e venturi), sem necessidade de montagem experimental e para qualquer tipo de fluido de trabalho com propriedades físicas conhecidas.

O modelo para a calibração de um sistema de medição de vazão transiente, que elimine a metodologia experimental, ainda depende de uma análise mais detalhada que permita reproduzir mais fielmente a dissipação da onda de vazão proveniente de qualquer perturbação produzida no sistema. O desenvolvimento deste modelo analítico, junto com a metodologia numérica proposta, em coordenadas generalizadas, pode objetivamente se transformar num modelo de calibração transiente de medidores de vazão do tipo pressão diferencial.

A comparação do sistema fluido-dinâmico com o sistema mecânico é perfeitamente viável, tal como mostraram os resultados obtidos. No entanto, a dificuldade em se obter e definir os parâmetros do escoamento, do ponto de vista da mecânica dos fluidos, pode ter contribuído para as pequenas discrepâncias apresentadas pelo modelo. Um sistema com maior número de massas concentradas poderia reproduzir melhor os valores experimentais.

A utilização de medidores de vazão do tipo pressão diferencial em sistemas hidráulicos, deve sempre considerar a compressibilidade do sistema. A influência desta compressibilidade aumenta com a frequência e é inversamente proporcional ao nível de pressão do sistema, tal como mostraram os resultados experimentais obtidos.

Do ponto de vista experimental, pode-se dizer que vários são os aspectos que poderiam ser melhorados para obter uma análise mais eficiente do escoamento pulsante:

- Em primeiro lugar transdutores de pressão podem ser utilizados na saída do gerador de pulsos de vazão, para controle do nível de pressão do sistema e das flutuações ocasionadas por variações de frequência, provenientes do motor de acionamento do gerador de pulsos.
- Para evitar vibrações do sistema, um novo método de fixação pode ser adotado, de maneira que permita a obtenção de frequências maiores no sistema sem a distorção do pulso de vazão.

- Tubulações de aço com superfícies internas brunidas podem ser usadas em substituição ao acrílico. Desta forma, problemas de dilatação e expansão das tubulações podem ser evitadas.

- A utilização de transdutores de pressão diferencial na placa numa faixa menor de operação, permitiria a realização de testes dinâmicos com placas de relações de diâmetros menores e menores vazões médias, tal como previsto no trabalho original.

- O diâmetro do cilindro do gerador de pulsos de vazão deve ter a mesma dimensão do diâmetro da tubulação do sistema de medição de vazão para evitar reduções de área no sistema.

De uma maneira geral pode-se dizer que, com o auxílio da metodologia teórica (analítica e numérica) e da metodologia experimental proposta, pode-se chegar a obter um modelo de calibração de medidores de vazão transiente do tipo pressão diferencial, para escoamentos a baixo número de Reynolds. Um modelo deste tipo seria de grande utilidade em sistemas hidráulicos e pneumáticos ou em qualquer outra área da engenharia que envolva escoamentos pulsantes.

8.2 - RESUMO DAS CONTRIBUIÇÕES

A contribuição mais importante do presente trabalho é o desenvolvimento de uma metodologia teórica e experimental para o estudo de escoamentos pulsantes, os quais são encontrados em muitas aplicações da Engenharia.

A metodologia experimental desenvolvida aqui pode ser utilizada para o controle e análise de perturbações em escoamentos pulsantes, permitindo a determinação dos parâmetros necessários para o acompanhamento da flutuação de vazão ou de qualquer outro sinal de excitação.

O modelo analítico desenvolvido no presente trabalho mostra que um escoamento pulsante pode ser tratado como um sistema vibratório de segunda ordem, permitindo a análise da dissipação da perturbação. Desta forma, um estudo mais detalhado deste modelo pode resultar numa boa ferramenta para o estudo de escoamentos pulsantes, sempre que a intensidade da perturbação seja conhecida. Este modelo permite determinar as características dinâmicas do escoamento a partir de parâmetros medidos experimentalmente.

Por último, uma metodologia completa é desenvolvida para o estudo numérico de escoamentos pulsantes a baixo número de Reynolds através de dutos com restrições, utilizando-se a técnica de volumes finitos em coordenadas generalizadas. Esta metodologia numérica é de grande utilidade na calibração de sistemas de medição de vazão do tipo pressão diferencial, permitindo sua calibração dinâmica sem necessidade de uma bancada experimental e podendo ser utilizados para qualquer velocidade de escoamento, qualquer tipo de fluido e qualquer geometria de restrição.

É importante salientar, finalmente, que a principal contribuição do presente trabalho não está nos resultados propriamente ditos, mas sim no desenvolvimento de metodologias para tratamento de escoamentos pulsantes, aplicados a sistemas hidráulicos e pneumáticos, visando a sua medição e controle.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Lomas, D., Selecting Flowmeters for Industrial Applications. Brown Boveri Review, Vol. 2, pp. 69-79, 1986.
- [2] Delmée, G. J., Manual de Medição de Vazão, Edgard Blücher Ltda, 1983.
- [3] Pereira, M. T., Novas Técnicas para Determinação de Coeficientes de Descarga, Fatores de Expansão e Uso de Retificadores de Escoamento para Placas de Orifício. IX Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica. Dezembro, pp. 275-78, 1987.
- [4] Merrit, H. E., Hydraulic Control Systems. John Wiley & Sons, Inc., 1967.
- [5] Bonnington, S. T., Flow Measurement Errors, Chemical & Process Engineering, december, 1960.
- [6] Johansen, F.C., Flow Through Pipe Orifices at Low Reynolds Numbers. Proc. Royal Soc. London, Num. 126, pp. 231-45, 1930.
- [7] Bogema, M. and Monkmeyer, P. L., The Quadrant Edge Orifice - A Fluid Meter for Low Reynolds Numbers. Journal of Basic Engineering Trans. ASME, Sep., pp. 729-34, 1960.

- [8] Alpay, S. A., The Influence of Dynamic Effects on the Flow Coefficient of an Orifice, Second Fluid Power Symposium, Guildford, England, 1971.
- [9] Bowns, D. E., and Tilley, D. G., The Development of a Transient Flowmeter for Use in Oil Hydraulic Systems, 4th International Fluid Power Symposium, University of Sheffield, England, 1975.
- [10] Garshin, P. A., Smirnov, R. E. and Tupichenkov, A. A., Hidrodynamic Factors in Measuring Flows. Izmer. Tekh, n^o 8, Aug, 1979, pp. 37-8.
- [11] Tuve, G. L. and Sprenkle, R. E., Orifice Discharge Coefficients for Viscous Liquids. Instruments, Vol. 6, Nov, pp. 201-6, 1933.
- [12] Mills, R. D., Numerical Solutions of Viscous Flow Through of a Pipe Orifice at Low Reynolds Numbers. Journal Mech. Eng. Science. Vol. 10, n^o 2, pp. 133-140, 1968.
- [13] Greenspan, D., Numerical Studies of Viscous Incompressible Flow Through an Orifice for Arbitrary Reynolds Number. Int. J. Num. Mech. in Eng., Vol. 6, pp. 489-96, 1973.
- [14] Nigro, F. E. B., Flow Though Round-Edged Spool-Valve Constrictions and Orifice Plates: Numerical Solution of the Viscous Flow in Natural Coordinates and Conformal Mapping Solutions of the Inviscid Flow. Ph.D. Thesis submitted to the Univ. of Waterloo, Dept. of Mech. Eng., 1977
- [15] Strong, A. B., Nigro, F. E. B., Alpay, S. A., The Use of "Natural" Coordinates in the Numerical Solution of Viscous Flow Problems. Presented to the International Conference on Physical Chemistry and Hydrodynamics. Oxford, England, 1977.

- [16] Crockett, K. A. and Upp, E. L., The Measurement and Effects of Edge Sharpness on the Flow Coefficients of Standard Orifices. Journal of Fluid Engineering, ASME, June, pp. 271-74, 1973.
- [17] Bogema, M., Spring, B. and Ramamoorthy, M. V., Quadrant Edge Orifice Performance - Effect of Up Stream Velocity Distribution. Journal of Basic Engineering. Trans. ASME, Dec., pp. 415-18, 1962.
- [18] Sheikholeslami, M. Z. and Patel, B.R., Numerical Modeling of Turbulent Flow Through Orifice Meters - A Parametric Study. 2nd International Conference on Flow Measurement, London, UK: 11-13, May, 1988.
- [19] Create Inc. "FLUENT" manual, TN-369 Rev. 3, February 1987.
- [20] Trengrouse, G. H., Imrie, B. W., Male, D. H., Comparison of Unsteady Flow Discharge Coefficients for Sharp-Edged Orifices With Steady Flow Values. Journal of Mechanical Engineering Science. Vol. 8, n^o 3, 1966.
- [21] Yokota, S. and Nakano, K., On Extending the Intelligent Potential of a Cylindrical Choke Type Instantaneous Flowmeter, 2nd International Conference on Flow Measurement, paper A3, London, 1988.
- [22] Pedroso, J. L., Estudo Experimental da Atenuação de Ondas Orientado aos Transitórios Ocasionados pela Reação Explosiva Sódio-Água em Reatores Rápidos, 6^o Simpósio Brasileiro sobre Tubulações e Vasos de Pressão, trabalho n^o 18, pp. 303-321, Rio de Janeiro, 1990.
- [23] Pedroso L. J. e Gilberto, R. J., Experimental Investigation of the Pressure Loss Through Perforated Structures in Unsteady Flow, Journal of Structural Mechanics, VTT, Finland, Vol. 21, n^o 1, 1988.

- [24] Tsung, T., Analytische und Experimentelle Untersuchungen zur Bestimmung der Hydraulischen Induktivität von Schlitzten und Bohrungen, Doktor-Ingenieurs Dissertation, Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen, 1991.
- [25] Hunt, B. W., Numerical Solution of an Integral Equation for Flow From a Circular Orifice. Journal of Fluid Mech., Vol. 31, part. 2, pp. 361-77, 1968.
- [26] Jeppson, R. W., Inverse Formulation and Finite Difference Solution for Flow from Circular Orifice. Journal of Fluid Mech., Vol. 40, part. 1, pp. 215-23, 1970.
- [27] Medaugh, F. and Johnson, G., Investigation of the Discharge and Coefficients of Small Circular Orifices. Civil Engineering, Vol. 10, pp. 422-24, 1940.
- [28] Uchiyama, M. and Hakamori, K., Measurement of Instantaneous Flow Rate Through Estimation of Velocity Profiles. Departament of Precision Engineering. Tohoku University, Sendai, Japan, 1980.
- [29] Studzinski, D. and Berg, D., Effect of Surface Conditions on Accuracy of Flow Rate Measurement. 2nd International Conference on Flow Measurement. London, UK: 11-13 may, 1988.
- [30] Yamaguchi, A., Non-Steady Characteristics of Orifice. Bulletin of the J.S.M.E, Vol. 19, Num. 131, pp. 505-12, May, 1976.
- [31] Linsingen, I. V., Curso de Sistemas Hidráulicos, Laboratório de Sistemas Hidráulicos e Pneumáticos, Universidade Federal de Santa Catarina, 1989.

- [32] Bejan, A., Convection Heat Transfer, John Willey & Sons, 1984.
- [33] Burmeister, L. C., Convective Heat Transfer, John Willey & Sons, 1983.
- [34] Doebelin, E. O., Measurement Systems, Applications and Design, McGraw-Hill, New York, 1983.
- [35] Mansur, S. S., Simulação Numérica do Funcionamento de Compressores Herméticos Alternativos Considerando as Pulsações do Gás, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1986.
- [36] Ferreira, R. T. S., Influência do Escoamento Através da Folga Pistão/Cilindro no Desempenho de um Compressor Hermético Alternativo. Anais VIII COBEM, 1985, pp. 233-236.
- [37] DIN 1952-1982 - Medição de Vazão Através de Placas, Bocais e Tubos Venturi em Tubos com Seção Transversal Circular e Ocupação Plena - Comitê de Normalização de Aparelhos e Equipamentos Primários (NPM) do Instituto Alemão de Normalização (DIN), 1982.
- [38] ISO 5167-1980 - Measurement of Fluid Flow by Means of Orifice Plates, Nozzles and Venturi Tubes Inserted in Circular Cross-section Conduits Running Full, ISO Standard Handbook 15, 1983.
- [39] ASME - Fluid Meters, Their Theory and Application - Research Committee on Fluid Meters, sixth edition, 1971.
- [40] AFNOR NF 10-102. Mesure de Débit des Fluides au Moyen de Diaphragmes, Tuyères et Tubes de Venturi Inserés dans des conduites Encharge de Section Circulaire, 1980.

- [41] Stringer, J., Hydraulic Systems Analysis - An Introduction. The Macmillan Press Ltd, London, 1976.
- [42] Alpay, S. A., The Flow Coefficient of a Hydraulic Control Valve Under Dynamic Conditions. University of Waterloo.
- [43] McCloy, D., Effects of Fluid inertia and Compressibility on the Performance of Valves and Flow Meters Operating under Unsteady Conditions, I. Mech. Eng. Sci. 1966, vol. 8, pp 52-61.
- [44] Func, J. E., Wood, D. J. and Chao, S. P., The Transient Response of orifices and Very Short Lines. Journal of Basic Engineering, Trans. ASME, vol. 94, 1972 p 483.
- [45] Burrows, C. R. and Martin, D. J., Measuring the Oscilating Flow From an Eletro-Hydraulic servo-valve using an Indirect Method. Proc. Instn. Mech. Engnrs., vol. 118, 1974.
- [46] LABMETRO, Apostila "Qualificação de Instrumentos de Medição"- Calibração e Aferição, Laboratório de Metrologia e Automação, Depto. de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [47] LABMETRO, Apostila Técnicas de Pesquisa Experimental, Laboratório de Metrologia e Automação, Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [48] Coughanowr, D. R. e Koppel, L. B., Análise e Contrôle de Processos, Guanabara, 1978.

- [49] Ogata, K., Engenharia de Contrôlo Moderno, Prentice/Hall do Brasil, 1982.
- [50] Bendat, J. and Piersol, A.G., Random Data - Analysis and Measurement Procedures. John Willey & Sons, 1986.
- [51] Barna, P.S., Fluid Mechanics for Engineers - third Edition Butterworth Co. Toronto, 1969.
- [52] Maliska, C. R., Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional- Fundamentos e Coordenadas Generalizadas, livro em preparação. Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, 1994.
- [53] Silva, A. F. C., Um Procedimento em Volumes Finitos para Solução de Escoamentos de Qualquer Velocidade, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1991.
- [54] Thompson, J. F., Warsi, Z. U. A., Mastin, C. W., Numerical Grid Generation - Foundations and Applications. 1985. (Elsevier Science Publishing Co. Inc.).
- [55] Thompson, J. F., Grid Generations Techniques in Computational Fluid Dynamics, AIAA Journal, Vol. 22, n^o 11, pp. 1505-1523, 1984.
- [56] Taylor, A. E. & Mann, W. R., Advanced Calculus. John Wiley & Sons Inc., Caps. 8 e 9.
- [57] Raithby, G. D. e Torrance, K. E., Upstream-Weighted Differencing Schemes and Their Applications to Elliptic Problems Involving Fluid Flow, Computer and Fluids, vol.2, pp 191- 206, 1974.

- [58] Negri, V. J., Modelagem de Servomecanismos Hidráulicos e Simulação de um Servomecanismo Mecânico-Hidráulico, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Santa Catarina, 1987.
- [59] Silva, A. F. C. e Maliska, C. R., Uma Formulação Segregada em Volumes Finitos para Escoamentos Compressíveis e/ou Incompressíveis em Coordenadas Generalizadas, I Encontro Nacional de Ciências Térmicas, Águas de Lindóia, 1988.
- [60] França, M. F., Estudo Comparativo de Métodos para Tratamento do Acoplamento Pressão-Velocidade. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Catarina, Setembro 1991.
- [61] Schneider, G. E. and Zedan, M., A Modified Strongly Implicit Procedure for the Numerical Solution of Field Problems. Numerical Heat Transfer, Vol. 4, pp. 1-19, 1981.
- [62] Willer, R. W., Flow Measurement Engineering Handbook, second edition, McGraw-Hill, 1989.
- [63] Maliska, C. R., A Solution Method for Three-Dimensional Parabolic Fluid Flow Problems in Nonorthogonal Coordinates. Ph.D. Thesis, Waterloo Univ., Ontario, Canadá, 1981.
- [64] Patankar, S. V., Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [65] Schlichting, H., Boundary-Layer Theory, pg. 419-22. McGraw-Hill, 1968.

- [66] Wellstead, P. E., Physical System Modelling. Control Systems Centre, University of Manchester Institute of Science and Technology. Academic Press, 1979

APÊNDICE A

TRANSFORMAÇÃO DAS EQUAÇÕES PARA COORDENADAS GENERALIZADAS

A-1) TRANSFORMAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL

A equação geral em coordenadas cilíndricas é dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r v\phi) + p^\phi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma^\phi \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\Gamma^\phi r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + S^\phi \end{aligned} \quad (A.1)$$

Transformando primeiro o lado esquerdo da equação (A.1)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + p^\phi = \text{RHS} \quad (A.2)$$

Dividindo por J e aplicando a regra da cadeia

$$\frac{1}{J} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\xi_x}{J} + \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{\eta_x}{J} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\xi_r}{J} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\eta_r}{J} + \frac{P^\phi}{J} = \frac{\text{RHS}}{J}$$

ou

$$\frac{1}{J} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial \xi} r_\eta - \frac{\partial E}{\partial \eta} r_\xi - \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \xi} x_\eta + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \eta} x_\xi + \frac{P^\phi}{J} = \frac{\text{RHS}}{J} \quad (A.3)$$

Trabalhando sempre na forma conservativa, define-se

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (Er_{\eta}) = r_{\eta} \frac{\partial E}{\partial \xi} + E \frac{\partial}{\partial \xi} r_{\eta} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \xi} r_{\eta} = \frac{\partial}{\partial \xi} (Er_{\eta}) - \frac{E \partial}{\partial \xi} r_{\eta}$$

(A.4)

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (Er_{\xi}) = r_{\xi} \frac{\partial E}{\partial \eta} + E \frac{\partial}{\partial \eta} r_{\xi} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial \eta} r_{\xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} (Er_{\xi}) - \frac{E \partial}{\partial \eta} r_{\xi}$$

e

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (Fx_{\eta}) = \frac{x_{\eta}}{r} \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{F}{r} \frac{\partial x_{\eta}}{\partial \xi} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \xi} \frac{x_{\eta}}{r} =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (Fx_{\eta}) - \frac{F}{r} \frac{\partial x_{\eta}}{\partial \xi}$$

(A.5)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (Fx_{\xi}) = \frac{x_{\xi}}{r} \frac{\partial F}{\partial \eta} + \frac{F}{r} \frac{\partial x_{\xi}}{\partial \eta} \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{x_{\xi}}{r} =$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (Fx_{\xi}) - \frac{F}{r} \frac{\partial x_{\xi}}{\partial \eta}$$

Substituindo (A.4) e (A.5) em (A.3), obtém-se a equação na forma conservativa

$$\frac{1}{J} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (Ey_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (Ey_{\xi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (Fx_{\eta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (Fx_{\xi}) +$$

$$\frac{P^{\phi}}{J} = \frac{RHS}{J}$$

(A.6)

Multiplicando e dividindo por r o segundo e terceiro termo e introduzindo r dentro da derivada, obtém-se as seguintes expressões

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (rEy_{\eta}) = \frac{\partial}{\partial \xi} (Ey_{\eta}) + \frac{Ey_{\eta}}{r} r_{\xi}$$

(A.7)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (Ey_{\eta}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (rEy_{\eta}) - \frac{Ey_{\eta}}{r} r_{\xi}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r E y_{\xi}) = \frac{\partial}{\partial \eta} (E y_{\xi}) + \frac{E y_{\xi}}{r} r_{\eta} \quad (\text{A. 8})$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (E y_{\xi}) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r E y_{\xi}) - \frac{E y_{\xi}}{r} r_{\eta}$$

Substituindo (A.7) e (A.8) em (A.6) obtém-se finalmente a equação transformada para o lado esquerdo.

$$\frac{1}{J} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} [\rho r U \phi] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} [\rho r V \phi] + \frac{P^{\phi}}{J} = \frac{RHS}{J} \quad (\text{A. 9})$$

Procedendo-se da mesma forma para o lado direito

$$\frac{RHS}{J} = \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\xi_x}{J} + \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\eta_x}{J} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \xi} \frac{\xi_r}{J} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\eta_r}{J} + \frac{S^{\phi}}{J} \quad (\text{A. 10})$$

$$\frac{RHS}{J} = \frac{\partial A}{\partial \xi} r_{\eta} - \frac{\partial A}{\partial \eta} r_{\xi} - \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \eta} x_{\xi} + \frac{S^{\phi}}{J} \quad (\text{A. 11})$$

Passando para a forma conservativa,

$$\frac{RHS}{J} = \frac{\partial}{\partial \xi} (A y_{\eta}) - \frac{\partial}{\partial \eta} (A y_{\xi}) - \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \xi} x_{\eta} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial \eta} x_{\xi} + \frac{S^{\phi}}{J} \quad (\text{A. 12})$$

introduzindo r na derivada do primeiro e segundo termo do lado direito

$$\frac{RHS}{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (r A y_{\eta} - B x_{\eta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (B x_{\xi} - r A y_{\xi}) + \frac{S^{\phi}}{J} \quad (\text{A. 13})$$

Substituindo as variáveis originais

$$\begin{aligned} \frac{RHS}{J} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r \Gamma^{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} y_{\eta} - r \Gamma^{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} x_{\eta} \right] + \\ &\quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r \Gamma^{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial r} x_{\xi} - r \Gamma^{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} y_{\xi} \right] + \frac{S^{\phi}}{J} \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

Aplicando novamente a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{RHS}{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r J \Gamma^\phi y_\eta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\xi_x}{J} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\eta_x}{J} \right) - r J \Gamma^\phi x_\eta \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\xi_r}{J} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\eta_r}{J} \right) \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[r J \Gamma^\phi x_\xi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\xi_r}{J} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\eta_r}{J} \right) - r J \Gamma^\phi y_\xi \left(\frac{\partial \phi}{\partial \xi} \frac{\xi_x}{J} + \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \frac{\eta_x}{J} \right) \right] + \frac{S}{J} \phi \end{aligned} \quad (A.15)$$

ou

$$\begin{aligned} \frac{RHS}{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[r J \Gamma^\phi (y_\eta^2 + x_\eta^2) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - r J \Gamma^\phi (y_\eta y_\xi + x_\eta x_\xi) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[- r J \Gamma^\phi J (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + r J \Gamma^\phi (x_\xi^2 + y_\xi^2) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \frac{S}{J} \phi \end{aligned} \quad (A.16)$$

sabe-se que

$$\begin{aligned} \alpha &= x_\eta^2 + y_\eta^2 \\ \gamma &= x_\xi^2 + y_\xi^2 \\ \beta &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta \end{aligned} \quad (A.17)$$

Substituindo (A.17), obtém-se finalmente para o lado direito,

$$\begin{aligned} \frac{RHS}{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(r J \Gamma^\phi \alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - (r J \Gamma^\phi \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(r J \Gamma^\phi \gamma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (r J \Gamma^\phi \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \frac{S}{J} \phi \end{aligned} \quad (A.18)$$

e a equação geral transformada fica

$$\begin{aligned} \frac{1}{J} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r U \phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r V \phi) + \frac{P}{J} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(r J \Gamma^\phi \alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - (r J \Gamma^\phi \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(r J \Gamma^\phi \gamma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (r J \Gamma^\phi \beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] + \frac{S}{J} \phi \end{aligned} \quad (A.19)$$

A-2) TRANSFORMAÇÃO DOS TERMOS FONTES $\frac{P^\phi}{J}$ e $\frac{S^\phi}{J}$

a) P^ϕ

Para $\phi = u$, tem-se

$$P^u = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_x \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{P^u}{J} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \frac{\xi_x}{J} + \frac{\partial p}{\partial \eta} \frac{\eta_x}{J} = \frac{\partial p}{\partial \xi} r_\eta - \frac{\partial p}{\partial \eta} r_\xi \quad (\text{A.21})$$

Para $\phi = v$, tem-se

$$P^v = \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \xi} \xi_r + \frac{\partial p}{\partial \eta} \eta_r = \frac{\partial p}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial p}{\partial \xi} x_\eta \quad (\text{A.22})$$

b) S^ϕ

$$S^u = \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x} [\nabla \cdot \vec{v}] \quad (\text{A.23})$$

Aplicando a regra da cadeia

$$S^u = \frac{\mu}{3} \left[\xi_x \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) + \eta_x \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.24})$$

$$S^u = \frac{\mu}{3} \left[r_\eta J \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) - r_\xi J \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.25})$$

$$\hat{S}^u = \frac{\mu}{3} \left[r_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{v}) - r_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{v}) \right] \quad (\text{A.26})$$

onde

$$\hat{S}^u = \frac{S^u}{J} \quad (\text{A.27})$$

Por outro lado, o divergente da velocidade, $\nabla \cdot \vec{v}$, é dado por

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \quad (\text{A.28})$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \xi_x + \frac{\partial u}{\partial \eta} \eta_x + \frac{\partial v}{\partial \xi} \xi_r + \frac{\partial v}{\partial \eta} \eta_r + \frac{v}{r} \quad (\text{A.29})$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = r_\eta J \frac{\partial u}{\partial \xi} - r_\xi J \frac{\partial u}{\partial \eta} - x_\eta J \frac{\partial v}{\partial \xi} + x_\xi J \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \quad (\text{A.30})$$

$$\nabla \cdot \vec{V} = J \frac{\partial}{\partial \xi} (r_\eta u - x_\eta v) + J \frac{\partial}{\partial \eta} (x_\xi v - r_\xi u) + \frac{v}{r} \quad (\text{A.31})$$

Como as componentes contravariantes são dadas por

$$U = r_\eta u - x_\eta v \quad (\text{A.32})$$

$$V = x_\xi v - r_\xi u \quad (\text{A.33})$$

obtem-se

$$\nabla \cdot \vec{V} = J \left[\frac{\partial}{\partial \xi} U + \frac{\partial}{\partial \eta} V \right] + \frac{v}{r} \quad (\text{A.34})$$

de onde

$$\begin{aligned} \hat{S}^u = \frac{\mu}{3} \left\{ J r_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] - \right. \\ \left. J r_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$S^v = \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial r} \left[\nabla \cdot \vec{V} \right] - \frac{2\mu v}{r^2} \quad (\text{A.36})$$

$$S^v = \frac{\mu}{3} \left[\xi_r \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{V})}{\partial \xi} + \eta_r \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{V})}{\partial \eta} \right] - \frac{2\mu v}{r^2} \quad (\text{A.37})$$

$$S^v = \frac{\mu}{3} \left[-x_\eta J \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{V})}{\partial \xi} + x_\xi J \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{V})}{\partial \eta} \right] - \frac{2\mu v}{r^2} \quad (\text{A. 38})$$

$$\hat{S}^v = \frac{\mu}{3} \left[x_\xi \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{V})}{\partial \eta} - x_\eta \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{V})}{\partial \xi} \right] - \frac{2\mu v}{Jr^2} \quad (\text{A. 39})$$

onde $\hat{S}^v = S^v/J$

e finalmente,

$$\begin{aligned} \hat{S}^v &= \frac{\mu}{3} \left\{ J x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] - \right. \\ &\quad \left. J x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{v}{r} \right] - \frac{2\mu v}{Jr^2} \right\} \quad (\text{A. 40}) \end{aligned}$$

APÊNDICE B

OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES APROXIMADAS

B-1) DISCRETIZAÇÃO DA EQUAÇÃO GERAL

A equação transformada no sistema (ξ, η) é

$$\begin{array}{c}
 \text{I} \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \text{III} \\
 \hline
 \frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (r\rho U\phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (r\rho V\phi) = - \frac{p^\phi}{J} + \frac{S^\phi}{J} + \\
 \\
 \text{IV} \\
 \hline
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(rJ\Gamma^\phi_\alpha) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - (rJ\Gamma^\phi_\beta) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] + \\
 \\
 \text{V} \\
 \hline
 \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(rJ\Gamma^\phi_\gamma) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (rJ\Gamma^\phi_\beta) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]
 \end{array} = - \frac{p^\phi}{J} + \frac{S^\phi}{J} + \quad (B.1)$$

Integrando cada um dos termos para um perímetro $2\pi r$, no espaço e no tempo, obtém-se

$$I = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \left[\frac{1}{J} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) r dt d\xi d\eta \right] = \left[(\rho\phi)^{n+1} - (\rho\phi)^n \right] \frac{r\Delta\xi\Delta\eta}{J} \quad (B.2)$$

como $\rho\phi$ é constante no volume em cada intervalo de tempo,

$$I = \left[(\rho\phi)^{n+1} - (\rho\phi)^n \right] \frac{r\Delta\xi\Delta\eta}{J} = \left[\rho_p \phi_p^{n+1} - \rho_p \phi_p^n \right] \frac{r\Delta\xi\Delta\eta}{J} \quad (B.3)$$

Definindo

$$M_p = \frac{\rho_p r\Delta\xi\Delta\eta}{J_p} \quad (B.4)$$

obtem-se

$$I = \left[\rho_p \phi_p^{n+1} - \rho_p \phi_p^n \right] \frac{r\Delta\xi\Delta\eta}{J} = (M_p \phi_p)^{n+1} - (M_p \phi_p)^n \quad (B.5)$$

$$\begin{aligned} II &= \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho r U \phi) r dt d\xi d\eta = \\ &= \int_{\eta_s}^{\eta_n} \int_t^{t+\Delta t} \left[(\rho r U \phi)_e - (\rho r U \phi)_w \right] d\eta dt \end{aligned} \quad (B.6)$$

para ϕ constante ao longo de $d\eta$

$$II = \int_t^{t+\Delta t} \left[\phi_e (\rho r U)_e - \phi_w (\rho r U)_w \right] \Delta\eta dt \quad (B.7)$$

Para avaliar ϕ e o fluxo $\rho r U \eta$ no tempo, estabelece-se um tempo

$t + \Theta\Delta t$, onde $0 \leq \Theta \leq 1$. Assim,

$$II = \phi_e^{t+\Theta\Delta t} (\rho r U)_e^{t+\Theta\Delta t} \Delta\eta\Delta t - \phi_w^{t+\Theta\Delta t} (\rho r U)_w^{t+\Theta\Delta t} \Delta\eta\Delta t \quad (B.8)$$

$$II = \left[\phi_e^{n+\Theta} (\rho r U)_e^{n+\Theta} - \phi_w^{n+\Theta} (\rho r U)_w^{n+\Theta} \right] \Delta\eta\Delta t \quad (B.9)$$

ou

$$II = (\dot{M}_e \phi_e^{n+\ominus} - \dot{M}_w \phi_w^{n+\ominus}) \Delta t \quad (B.10)$$

ou

$$II = (\dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w) \Delta t \quad (B.11)$$

onde

$$\dot{M}_e = (\rho r U)_e \Delta \eta \quad (B.12)$$

$$\dot{M}_w = (\rho r U)_w \Delta \eta \quad (B.13)$$

Da mesma forma

$$III = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} (\rho r V \phi) r d\eta d\xi d\eta = (\dot{M}_n \phi_n - \dot{M}_s \phi_s) \Delta t \quad (B.14)$$

onde

$$\dot{M}_n = (\rho r V)_n \Delta \xi \quad (B.15)$$

$$\dot{M}_s = (\rho r V)_s \Delta \xi \quad (B.16)$$

$$IV = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(\Gamma^\phi r_{\alpha J}) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - (\Gamma^\phi r_{\beta J}) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right] r d\eta d\xi d\eta \quad (B.17)$$

$$IV = \left[\left[\Gamma^\phi r_{\alpha J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \Gamma^\phi r_{\beta J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[\Gamma^\phi r_{\alpha J} \frac{\partial \phi}{\partial \xi} - \Gamma^\phi r_{\beta J} \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \right] \Delta \eta \Delta t \quad (B.18)$$

$$IV = \left[\left[D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e - \left[D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w \right] \Delta t \quad (B.19)$$

onde

$$D_1 = \Gamma^\phi r \alpha J \Delta \eta \quad (B.20)$$

$$D_2 = - \Gamma^\phi r \beta J \Delta \eta \quad (B.21)$$

$$V = \int_t^{t+\Delta t} \int_{\xi_w}^{\xi_e} \int_{\eta_s}^{\eta_n} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[(\Gamma^\phi r \gamma J) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (\Gamma^\phi r \beta J) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right] r d\eta d\xi d\eta \quad (B.22)$$

$$V = \left\{ \left[(\Gamma^\phi r \gamma J) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (\Gamma^\phi r \beta J) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n - \left[(\Gamma^\phi r \gamma J) \frac{\partial \phi}{\partial \eta} - (\Gamma^\phi r \beta J) \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s \right\} \Delta \xi \Delta t \quad (B.23)$$

$$V = \left[\left(D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_n - \left(D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right)_s \right] \Delta t \quad (B.24)$$

onde

$$D_3 = \Gamma^\phi r \gamma J \Delta \xi \quad (B.25)$$

$$D_4 = - \Gamma^\phi r \beta J \Delta \xi \quad (B.26)$$

Assim, levando estes valores à equação e dividindo tudo por Δt ,
obtem-se

$$\frac{(M_{PP}^\phi)^{n+1} - (M_{PP}^\phi)^n}{\Delta t} + \dot{M}_e \phi_e - \dot{M}_w \phi_w + \dot{M}_n \phi_n - M_s \phi_s = \left[D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_e -$$

$$\left[D_1 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} + D_2 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right]_w + \left[D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_n - \left[D_3 \frac{\partial \phi}{\partial \eta} + D_4 \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right]_s +$$

$$rL \left[\frac{\hat{S}^\phi}{J} + \frac{\hat{P}^\phi}{J} \right] \Delta \xi \Delta \eta \quad (B.27)$$

onde

$$\hat{S}^\phi = \frac{S^\phi}{J} \quad (\text{B.28})$$

$$\hat{p}^\phi = \frac{p^\phi}{J} \quad (\text{B.29})$$

Utilizando-se as funções de interpolação adimensionais "WUDS - Weight Upstream Differencing Scheme " (Raithby e Torrance[57]) para os termos convectivos e difusivos, obtém-se

$$\phi_e = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e\right) \phi_p + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e\right) \phi_E$$

$$\phi_w = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w\right) \phi_p + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w\right) \phi_P$$

(B.30)

$$\phi_n = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n\right) \phi_p + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n\right) \phi_N$$

$$\phi_s = \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s\right) \phi_p + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s\right) \phi_P$$

e os fluxos difusivos avaliados por

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_e = \bar{\beta}_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta \xi}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_w = \bar{\beta}_w \frac{\phi_P - \phi_w}{\Delta \xi}$$

(B.31)

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_n = \bar{\beta}_n \frac{\phi_N - \phi_P}{\Delta \eta}$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_s = \bar{\beta}_s \frac{\phi_P - \phi_s}{\Delta \eta}$$

As derivadas cruzadas avaliadas por

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_e &= \frac{\frac{(\phi_{NE} + \phi_N)}{2} - \frac{(\phi_S + \phi_{SE})}{2}}{2\Delta\eta} = \frac{\phi_{NE} + \phi_N - \phi_S - \phi_{SE}}{4\Delta\eta} \\
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right|_w &= \frac{\phi_{NW} + \phi_N - \phi_S - \phi_{SW}}{4\Delta\eta} \\
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_n &= \frac{\phi_{NE} + \phi_E - \phi_{NW} - \phi_W}{4\Delta\xi} \\
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_s &= \frac{\phi_E + \phi_{SE} - \phi_W - \phi_{SW}}{4\Delta\xi}
 \end{aligned} \tag{B.32}$$

Substituindo em (B.27) e reagrupando os termos obtém-se

$$\begin{aligned}
 &\frac{\dot{M}_P \phi_P^{n+1}}{\Delta t} + \phi_P^{n+\Theta} \left[\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right) - \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right) + \dot{M}_n \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) - \right. \\
 &\quad \left. \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_e}{\Delta\xi} + \frac{D_1 \bar{\beta}_w}{\Delta\xi} + \frac{D_3 \bar{\beta}_n}{\Delta\eta} + \frac{D_3 \bar{\beta}_s}{\Delta\eta} \right] = \\
 &\phi_E \left[-\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_e}{\Delta\xi} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta\xi} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta\xi} \right] + \\
 &\phi_w \left[\dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_w}{\Delta\xi} - \frac{D_{4n}}{4\Delta\xi} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta\xi} \right] + \\
 &\phi_N \left[-\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} - \frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} + \frac{D_3 \bar{\beta}_n}{\Delta\eta} \right] + \\
 &\phi_s \left[\dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) - \frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} + \frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} + \frac{D_3 \bar{\beta}_s}{\Delta\eta} \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \phi_{NE} \left[\frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta\xi} \right] + \phi_{SE} \left[-\frac{(D_2)_e}{4\Delta\eta} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta\xi} \right] + \\
& \phi_{NW} \left[-\frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta\xi} \right] + \phi_{SW} \left[\frac{(D_2)_w}{4\Delta\eta} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta\xi} \right] + \\
& \frac{M_P \phi_P}{\Delta t} + rL \left[\frac{\hat{S}^\phi}{J} + \frac{\hat{p}^\phi}{J} \right] \Delta\xi \Delta\eta
\end{aligned} \tag{B.33}$$

Por outro lado, a equação da continuidade é

$$\frac{\partial}{\partial\xi} (\rho U) + \frac{\partial}{\partial\eta} (\rho V) = 0 \tag{B.34}$$

Discretizando

$$\dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \tag{B.35}$$

Multiplicando por ϕ_P , obtém-se

$$\dot{M}_e \phi_P - \dot{M}_w \phi_P + \dot{M}_n \phi_P - \dot{M}_s \phi_P = 0 \tag{B.36}$$

Somando esta equação ao lado direito da equação (B.33), obtém-se, finalmente

$$\begin{aligned}
& \phi_P \left[-\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_e}{\Delta\xi} + \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_w}{\Delta\xi} - \right. \\
& \left. \dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \frac{D_3 \bar{\beta}_n}{\Delta\eta} + \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \frac{D_3 \bar{\beta}_s}{\Delta\eta} + \frac{M_P}{\Delta t} \right] = \\
& A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_{ne} \phi_{NE} + A_{se} \phi_{SE} + A_{nw} \phi_{NW} + \\
& A_{sw} \phi_{SW} + \frac{M_P \phi_P}{\Delta t} + L \left[\hat{S}^\phi - \hat{p}^\phi \right] r \Delta\xi \Delta\eta
\end{aligned} \tag{B.37}$$

ou

$$A_p \phi_P = \int A_{nb} \phi_{NB} + \frac{(M_P \phi_P)}{\Delta t} + L [\hat{S}^\phi - \hat{P}^\phi] r \Delta \xi \Delta \eta \quad (B.38)$$

onde $L [\hat{S}^\phi - \hat{P}^\phi] / \Delta t$ são as aproximações numéricas dos termos \hat{S}^ϕ e \hat{P}^ϕ que serão desenvolvidas a seguir. Os coeficientes são dados por

$$A_p = A_e + A_w + A_n + A_s + \frac{M_P}{\Delta t}$$

$$A_e = -\dot{M}_e \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_e}{\Delta \xi} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi}$$

$$A_w = \dot{M}_w \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) + \frac{D_1 \bar{\beta}_w}{\Delta \xi} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi}$$

$$A_n = -\dot{M}_n \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) + \frac{D_3 \bar{\beta}_n}{\Delta \eta} + \frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} - \frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta}$$

$$A_s = \dot{M}_s \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) + \frac{D_3 \bar{\beta}_s}{\Delta \eta} - \frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} + \frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta}$$

(B.39)

$$A_{ne} = \left[\frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} + \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} \right]$$

$$A_{se} = \left[-\frac{(D_2)_e}{4\Delta \eta} - \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \right]$$

$$A_{nw} = \left[-\frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta} - \frac{(D_4)_n}{4\Delta \xi} \right]$$

$$A_{sw} = \left[\frac{(D_2)_w}{4\Delta \eta} + \frac{(D_4)_s}{4\Delta \xi} \right]$$

(B.40)

Observa-se que $A_{ne} + A_{se} + A_{nw} + A_{sw} = 0$

A equação (B.38) pode também ser escrita na forma

$$\begin{aligned} A_p \phi_P &= A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_{ne} \phi_{NE} + \\ &A_{se} \phi_{SE} + A_{nw} \phi_{NW} + A_{sw} \phi_{SW} + B^\phi \end{aligned} \quad (B.41)$$

onde o termo fonte, B^ϕ é dado por

$$B^\phi = \frac{(M_p \phi_P)}{\Delta t} + L \left[\hat{S}^\phi - \hat{P}^\phi \right] r \Delta \xi \Delta \eta \quad (B.42)$$

B-2) DISCRETIZAÇÃO DO TERMO $L \left[\hat{S}^\phi - \hat{P}^\phi \right]$ UTILIZANDO DIFERENÇAS CENTRAIS

a) $L \left[\hat{P}^\phi \right]$

Para $\phi = u \longrightarrow \hat{P}^u = \frac{\partial P}{\partial \xi} r_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} r_\xi$

Discretizando no volume de controle mostrado na figura 5.7(a), obtém-se

$$L \left[\hat{P}^u \right] = r_P \left[\frac{\partial P}{\partial \xi} r_\eta - \frac{\partial P}{\partial \eta} r_\xi \right]_P \quad (B.43)$$

$$L \left[\hat{P}^u \right] = \left[r_\eta \left(P_e - P_w \right) - r_\xi \left(P_n - P_s \right) \right] \quad (B.44)$$

$$L \left[\hat{P}^u \right] = \left\{ r_\eta \left[\left(\frac{P_E - P_P}{\Delta \xi} \right) \right] - r_\xi \left[\frac{P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE}}{4 \Delta \eta} \right] \right\} \quad (B.45)$$

$$L \left[\hat{p}^u \right] = \left[\left(\frac{P_E - P_P}{\Delta \xi} r_\eta \right) - \frac{\left(P_N + P_{NE} - P_S - P_{SE} \right)}{4 \Delta \eta} r_\xi \right] \quad (B.46)$$

Para $\phi = v \longrightarrow \hat{p}^v = \frac{P\phi}{J} = \frac{\partial P}{\partial \eta} x_\xi - \frac{\partial P}{\partial \xi} x_\eta$ (B.47)

Discretizando no volume de controle mostrado na figura 5.7(b),
obtem-se

$$L \left[\hat{p}^v \right] = \left[\frac{P_N - P_P}{\Delta \eta} x_\xi - \frac{\left(P_E + P_{NE} - P_W - P_{NW} \right)}{4 \Delta \xi} x_\eta \right] \quad (B.48)$$

As derivadas x_ξ , x_η , r_ξ , r_η são avaliadas no ponto P.

b) $L \left[S^\phi \right]$

$$\hat{S}^u = \frac{\mu}{3} \left[r_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{V}) - r_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{V}) \right] \quad (B.49)$$

discretizando para o volume de controle na figura 5.8(a), tem-se

$$L \left[\hat{S}^u \right] = \frac{\mu}{3} \left\{ \frac{r_\eta}{\Delta \xi} \left[(\nabla \cdot \vec{V})_e - (\nabla \cdot \vec{V})_w \right] - \frac{r_\xi}{\Delta \eta} \left[(\nabla \cdot \vec{V})_n - (\nabla \cdot \vec{V})_s \right] \right\} \quad (B.50)$$

onde

$$(\nabla \cdot \vec{V})_e = J_e \left[\frac{U_E - U_P}{\Delta \xi} + \frac{V_E - V_{SE}}{\Delta \eta} \right] + \frac{(v_E + v_{SE})}{2 r_e} \quad (B.51)$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_w = J_w \left[\frac{U_P - U_W}{\Delta \xi} + \frac{V_P - V_S}{\Delta \eta} \right] + \frac{(v_P + v_S)}{2 r_w} \quad (B.52)$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_n = J_n \left[\frac{U_{NE} - U_E - U_{NW} - U_W}{4 \Delta \xi} + \frac{V_N + V_{NE} - V_S - V_{SE}}{4 \Delta \eta} \right] + \frac{(v_P + v_E)}{2 r_n} \quad (B.53)$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_s = J_s \left[\frac{U_E + U_{SE} - U_W - U_{SW}}{4 \Delta \xi} + \frac{V_E + V_P - V_{SE} - V_{SS}}{4 \Delta \eta} \right] + \frac{(v_s + v_{SE})}{2 r_s} \quad (\text{B.54})$$

$$\hat{S}^V = \frac{\mu}{3} \left[x_\xi \frac{\partial}{\partial \eta} (\nabla \cdot \vec{V}) - x_\eta \frac{\partial}{\partial \xi} (\nabla \cdot \vec{V}) - \frac{2 \mu v}{J r^2} \right] \quad (\text{B.55})$$

discretizando para o volume de controle mostrado na figura 5.8(b), tem-se

$$L \left[\hat{S}^U \right] = \frac{\mu}{3} \left\{ \left[(\nabla \cdot \vec{V})_n - (\nabla \cdot \vec{V})_s \right] \frac{x_\xi}{\Delta \eta} - \left[(\nabla \cdot \vec{V})_e - (\nabla \cdot \vec{V})_w \right] \frac{x_\eta}{\Delta \xi} \right\} - \frac{\mu v_P}{J r_P^2} \quad (\text{B.56})$$

onde

$$(\nabla \cdot \vec{V})_n = J_n \left[\frac{U_N - U_{NW}}{\Delta \xi} + \frac{V_N - V_P}{\Delta \eta} \right] + \frac{v_N + v_P}{2 r_n} \quad (\text{B.57})$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_s = J_s \left[\frac{U_P - U_W}{\Delta \xi} + \frac{V_P - V_S}{\Delta \eta} \right] + \frac{v_P + v_S}{2 r_s} \quad (\text{B.58})$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_e = J_e \left[\frac{U_{NE} + U_E - U_{NW} - U_W}{4 \Delta \xi} + \frac{V_N + V_{NE} - V_S - V_{SE}}{4 \Delta \eta} \right] + \frac{v_P + v_E}{2 r} \quad (\text{B.59})$$

$$(\nabla \cdot \vec{V})_w = J_w \left[\frac{U_N + U_P - U_{NW} - U_{SW}}{4 \Delta \xi} + \frac{V_{NW} + V_{NW} + V_N - V_S - V_{SW}}{4 \Delta \eta} \right] + \frac{v_W + v_P}{2 r} \quad (\text{B.60})$$

APÊNDICE C

OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DA PRESSÃO

A equação da continuidade é dada por

$$\frac{\dot{M}_P - \dot{M}_P}{\Delta t} + \dot{M}_e - \dot{M}_w + \dot{M}_n - \dot{M}_s = 0 \quad (C.1)$$

onde

$$\dot{M}_P = \rho_P r_P \Delta \xi \Delta \eta / J_P$$

$$\dot{M}_P^o = \rho_P^o r_P \Delta \xi \Delta \eta / J_P$$

$$\dot{M}_e = (\rho U r)_e \Delta \eta$$

$$\dot{M}_w = (\rho U r)_w \Delta \eta$$

$$\dot{M}_n = (\rho V r)_n \Delta \xi$$

$$\dot{M}_s = (\rho V r)_s \Delta \xi$$

(C.2)

onde U e V são as velocidades contravariantes. Para evitar não linearidades, os fluxos de massa são avaliados por

$$\begin{aligned}
\dot{M}_e &= \rho_e^* U_P r_e \Delta \eta + \rho_e U_P^* r_e \Delta \eta - \rho_e^* U_P^* r_e \Delta \eta \\
\dot{M}_w &= \rho_w^* U_W r_w \Delta \eta + \rho_w U_W^* r_w \Delta \eta - \rho_w^* U_W^* r_w \Delta \eta \\
\dot{M}_n &= \rho_n^* V_P r_n \Delta \xi + \rho_n V_P^* r_n \Delta \xi - \rho_n^* V_P^* r_n \Delta \xi \\
\dot{M}_s &= \rho_s^* V_P r_s \Delta \xi + \rho_s V_P^* r_s \Delta \xi - \rho_s^* V_P^* r_s \Delta \xi
\end{aligned} \tag{C.3}$$

As quantidades com asterisco são valores conhecidos de uma iteração anterior e as densidades nas interfaces são avaliadas por

$$\begin{aligned}
\rho_e &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e\right) \rho_P + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e\right) \rho_E \\
\rho_e^* &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e\right) \rho_P^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e\right) \rho_E^* \\
\rho_w &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w\right) \rho_W + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w\right) \rho_P \\
\rho_w^* &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w\right) \rho_W^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w\right) \rho_P^* \\
\rho_n &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n\right) \rho_P + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n\right) \rho_N \\
\rho_n^* &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n\right) \rho_P^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n\right) \rho_N^* \\
\rho_s &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s\right) \rho_S + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s\right) \rho_P \\
\rho_s^* &= \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s\right) \rho_S^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s\right) \rho_P^*
\end{aligned} \tag{C.4}$$

Substituindo-se na equação da continuidade, obtém-se

$$m_P^{\rho} \rho_P + m_e^{\rho} \rho_E + m_w^{\rho} \rho_W + m_n^{\rho} \rho_N + m_s^{\rho} \rho_S + m_e^u U_P + m_w^u U_W + m_n^v V_P + m_s^v V_S = b^c \tag{C.5}$$

onde

$$\begin{aligned}
m_p^\rho &= \frac{r_p \Delta \xi \Delta \eta}{J_p \Delta t} + \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right) U_p^* r_e \Delta \eta - \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right) U_w^* r_w \Delta \eta + \\
&\quad \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) V_p^* r_n \Delta \xi - \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right) V_s^* r_s \Delta \xi \\
m_e^\rho &= \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) U_p^* r_e \Delta \eta \\
m_w^\rho &= - \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) U_w^* r_w \Delta \eta \\
m_n^\rho &= \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) V_p^* r_n \Delta \xi \\
m_s^\rho &= - \left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) V_s^* r_s \Delta \xi \\
m_e^u &= \left[\left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_e \right) \rho_p^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_e \right) \rho_e^* \right] r_e \Delta \eta \\
m_w^u &= - \left[\left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_w \right) \rho_w^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_w \right) \rho_p^* \right] r_w \Delta \eta \\
m_n^u &= \left[\left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_n \right) \rho_p^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_n \right) \rho_n^* \right] r_n \Delta \xi \\
m_s^u &= - \left[\left(\frac{1}{2} + \bar{\alpha}_s \right) \rho_s^* + \left(\frac{1}{2} - \bar{\alpha}_s \right) \rho_p^* \right] r_s \Delta \xi \\
b^c &= \frac{\rho_p^0 r_p \Delta \xi \Delta \eta}{J_p \Delta t} + m_e^u U_p^* + m_w^u U_w^* + m_n^u V_p^* + m_s^u V_s^*
\end{aligned} \tag{C.6}$$

A equação (C.5) é a equação da continuidade discretizada e deve ser transformada em uma equação para o cálculo da pressão que permita a correção p' de um campo de pressão estimado P . Para isto procede-se como segue

Expressão de ρ em função de P'

Se a equação de estado é linearizada em função da pressão, na forma,

$$\rho = C^{\rho} P + b^{\rho} \quad (C.8)$$

Para um campo estimado de pressão P^* obtém-se um campo de densidades dado por

$$\rho^* = C^{\rho} P^* + b^{\rho} \quad (C.9)$$

e para um campo de pressão \bar{P}

$$\bar{\rho} = C^{\rho} \bar{P} + b^{\rho} \quad (C.10)$$

Subtraindo (C.9) de (C.10)

$$\bar{\rho} - \rho^* = C^{\rho} (\bar{P} - P^*) \quad (C.11)$$

$$\bar{\rho} = \rho^* + C^{\rho} (\bar{P} - P^*) \quad (C.12)$$

Definindo a correção P'

$$P' = \bar{P} - P^* \quad (C.13)$$

obtém-se

$$\bar{\rho} = \rho^* + C^{\rho} P' \quad (C.14)$$

Ou seja, o campo P^* gera um campo de densidades ρ^* que não satisfaz a conservação da massa. Desejamos obter uma correção P' de forma que o novo campo \bar{P} gere um novo campo $\bar{\rho}$ que satisfaz a conservação da massa. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\bar{\rho}_p &= \rho_p^* + C_p^\rho P'_p \\
\bar{\rho}_E &= \rho_E^* + C_E^\rho P'_E \\
\bar{\rho}_w &= \rho_w^* + C_w^\rho P'_w \\
\rho_N &= \rho_N^* + C_N^\rho P'_N \\
\rho_S &= \rho_S^* + C_S^\rho P'_S
\end{aligned} \tag{C.15}$$

Expressão de U e V em função de P'

Equação da quantidade de movimento na direção x

$$a_p u_p = \sum a_{nb} u_{nb} + \dot{M}_p u_p^o / \Delta t - L \left[P^u \right] \Delta \xi \Delta \eta + L \left[S^u \right] \Delta \xi \Delta \eta$$

ou

$$a_p u_p = \sum a_{nb} u_{nb} - L \left[P^u \right] \Delta \xi \Delta \eta + b^u \tag{C.16}$$

Se o campo u^* é gerado pelo campo estimado P^* e o campo \bar{u} é gerado pelo campo de pressões \bar{P} ,

$$a_p u_p^* = \sum a_{nb} u_{nb}^* - L \left[P^u \right] \Delta \xi \Delta \eta + b^u \tag{C.17}$$

$$a_p \bar{u}_p = \sum a_{nb} \bar{u}_{nb} - L \left[\bar{P}^u \right] \Delta \xi \Delta \eta + b^u \tag{C.18}$$

onde

$$b^u = \frac{\dot{M}_p u_p^o}{\Delta t} + L \left[S^u \right] \Delta \xi \Delta \eta \tag{C.19}$$

Subtraindo (C.17) de (C.18), obtém-se

$$a_p (\bar{u}_p - u_p^*) = \sum a_{nb} (\bar{u}_{nb} - u_{nb}^*) - L \left[\bar{P}^u - P^{*u} \right] \Delta \xi \Delta \eta \tag{C.20}$$

Definindo $u' = (\bar{u} - u^*)$ e da definição de P' ,

$$\bar{u}_p = u_p^* + \frac{1}{a_p} \left[\sum a_{nb} u'_{nb} - L \left[P'^u \right] \Delta \xi \Delta \eta \right] \quad (C.21)$$

Através de alguns dos métodos disponíveis para tratamento do acoplamento pressão-velocidade, a expressão anterior é aproximada por

$$\bar{u}_p = u_p^* - \bar{d}_p^u \cdot L \left[P'^u \right] \Delta \xi \quad (C.22)$$

onde \bar{d}_p^u depende do método adotado para o tratamento do acoplamento pressão-velocidade. Para o problema axisimétrico, o termo \bar{d}_p^u deve ser multiplicado por r na mesma posição da velocidade a que se refere.

Seguindo o mesmo procedimento para a quantidade de movimento na direção r , porém no mesmo volume de controle, obtém-se

$$\bar{v}_p = v_p^* - \bar{d}_p^v L \left[P'^v \right] \Delta \xi \quad (C.23)$$

Para o método de acoplamento SIMPLEC, as expressões de \bar{d}_p^u e \bar{d}_p^v são

$$\bar{d}_p^u = \frac{r_e}{a_p^u - \sum a_{nb}^u} \quad (C.24)$$

$$\bar{d}_p^v = \frac{r_n}{a_p^v - \sum a_{nb}^v} \quad (C.25)$$

Multiplicando \bar{u}_p por r_η e \bar{v}_p por x_η e fazendo $\bar{u}_p - \bar{v}_p$, obtém-se

$$\bar{U}_p = U_p^* - \bar{d}_p^u \left[L \left[P'^u \right]_{r_\eta} - L \left[P'^v \right]_{x_\eta} \right] \Delta \xi \quad (C.26)$$

por outro lado,

$$L \left[P', u \right] = \left[\frac{(P'_E - P'_P)}{\Delta \xi} r_\eta - \frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4\Delta \eta} r_\xi \right] \Delta \xi \Delta \eta r \quad (C.27)$$

A expressão para $L \left[P', v \right]$ já obtida não pode ser usada pois foi obtida para o volume de controle de v . Obtendo $L \left[P', v \right]$ para um volume de controle de u , tem-se

$$L \left[P', v \right] = \left[\frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4\Delta \eta} x_\xi - \frac{(P'_E - P'_P)}{\Delta \xi} x_\eta \right] \Delta \xi \Delta \eta r \quad (C.28)$$

Substituindo (C.27) e (C.28) em (C.26), obtém-se

$$\begin{aligned} \bar{U}_P = U_P^* - \bar{d}_P^U \Delta \xi \left[\left[\frac{(P'_E - P'_P)}{\Delta \xi} r_\eta^2 - \frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4\Delta \eta} r_\xi r_\eta \right] r \Delta \xi \Delta \eta - \right. \\ \left. \left[\frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4\Delta \eta} x_\xi x_\eta - \frac{(P'_E - P'_P)}{\Delta \xi} x_\eta^2 \right] r \Delta \xi \Delta \eta \right] \end{aligned} \quad (C.29)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_P = U_P^* - \bar{d}_P^U r \Delta V \left[\left[(P'_E - P'_P) r_\eta^2 - \frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4\Delta \eta} r_\xi r_\eta \Delta \xi - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4\Delta \eta} x_\xi x_\eta \Delta \xi + (P'_E - P'_P) x_\eta^2 \right] \right] \end{aligned} \quad (C.30)$$

incluindo r no termo \bar{d}_P^U , obtém-se

$$\bar{U}_P = U_P^* - \bar{d}_P^U \Delta \xi \Delta \eta \left[\alpha_P^u (P'_E - P'_P) - \frac{(P'_N + P'_{NE} - P'_S - P'_{SE})}{4} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \beta_P^u \right] \quad (C.31)$$

Esta expressão corrige a velocidade U^* gerada por um campo P^* , de forma que a velocidade \bar{U} gerada pelo campo \bar{P} satisfaça a conservação da massa. α deve ser avaliado onde está armazenada a velocidade u_P .

Analogamente,

$$\bar{U}_w = U_w^* - \bar{d}_w^U \Delta V \left[\alpha_w^u (P'_P - P'_W) - \frac{(P'_N + P'_{NW} - P'_S - P'_{SW})}{4} \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} \beta_w^u \right] \quad (C.32)$$

O procedimento realizado para o volume de controle de U deve ser repetido para o volume de controle de V, obtendo-se

$$\bar{V}_P = V_P^* - \bar{d}_P^V \Delta V \left[\gamma_P^v (P'_N - P'_P) - \frac{(P'_E + P'_{NE} - P'_W - P'_{NW})}{4} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \beta_P^v \right] \quad (C.33)$$

$$\bar{V}_S = V_S^* - \bar{d}_S^v \Delta V \left[\gamma_S^v (P'_P - P'_S) - \frac{(P'_E + P'_{SE} - P'_W - P'_{SW})}{4} \frac{\Delta \eta}{\Delta \xi} \beta_S^v \right] \quad (C.34)$$

Equação de P'

Substituindo (C.15), (C.31), (C.33) e (C.34) em (C.5), obtém-se

$$a_{P_P} P'_P = \sum a_{nb} P'_{nb} + b^{P'} \quad (C.35)$$

onde os coeficientes de P' e o termo fonte $b^{P'}$ são dados pelas equações (5.58) e (5.59).

APÊNDICE D

RESULTADOS EXPERIMENTAIS PARA AS DEMAIS PLACAS

Como mencionado no cap. 7, os gradientes de pressão e as vazões transientes correspondentes obtidas experimentalmente para as placas S1, S2, S3 e S4 são mostrados neste apêndice, para algumas das frequências de trabalho, com o intuito de que, de alguma forma, possam ser utilizadas como referência para validação de dados teóricos.

Da mesma forma que na placa E1, utilizada para validação da metodologia teórica, frequências acima de 8,0 Hz começam a distorcer o pulso de vazão, devido aos problemas experimentais já citados anteriormente. Nota-se, no entanto, que com o aumento da vazão média as distorções são menores, podendo atingir até os 10,0 Hz sem a deformação acentuada do pulso. É importante salientar que esta deformação do pulso de vazão, a partir de uma determinada frequência, é devido basicamente às vibrações do sistema, causadas pelo método de fixação dos dutos, e nada tem a ver com o escoamento, especificamente.

Os resultados para cada uma das placas citadas são apresentados para duas vazões médias e quatro frequências. Em todos os casos, a maior frequência apresentada é aquela para a qual a influência das vibrações do sistema começa a deformar o pulso de vazão.

D-1) GRADIENTES DE PRESSÃO E VAZÕES TRANSIENTES PARA A PLACA S1

As Figs. D.1 a D.16 mostram estes resultados

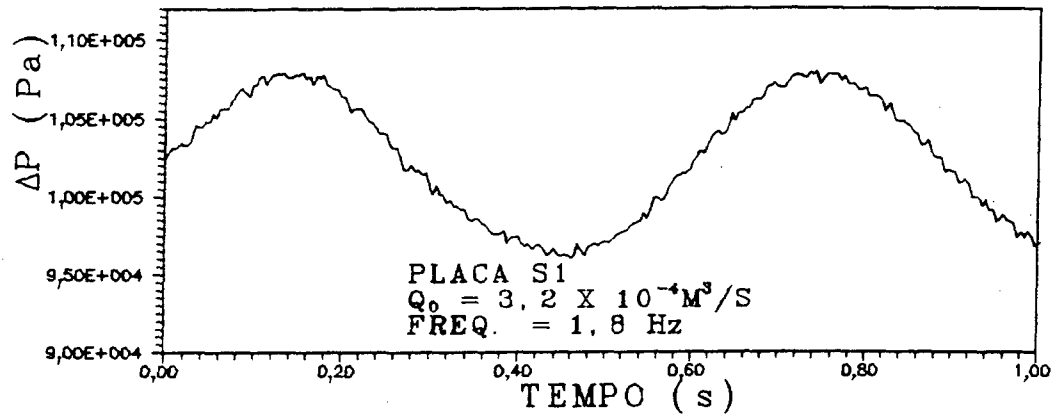


Fig. D.1

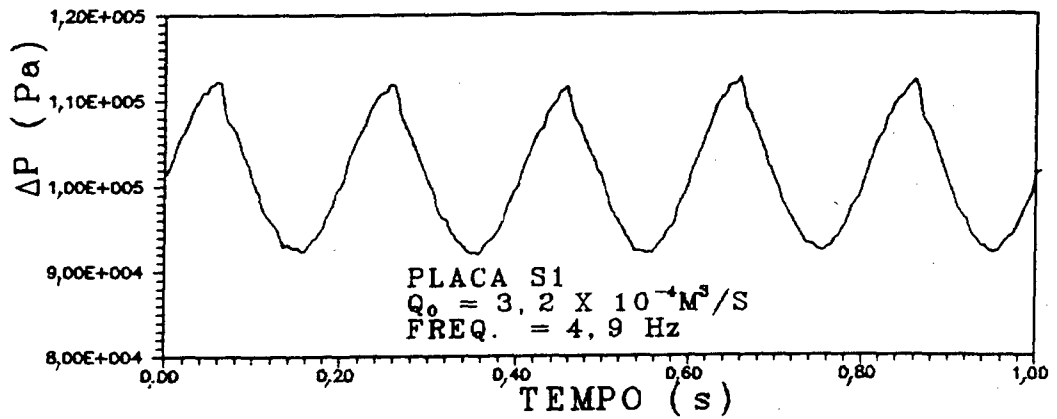


Fig. D.2

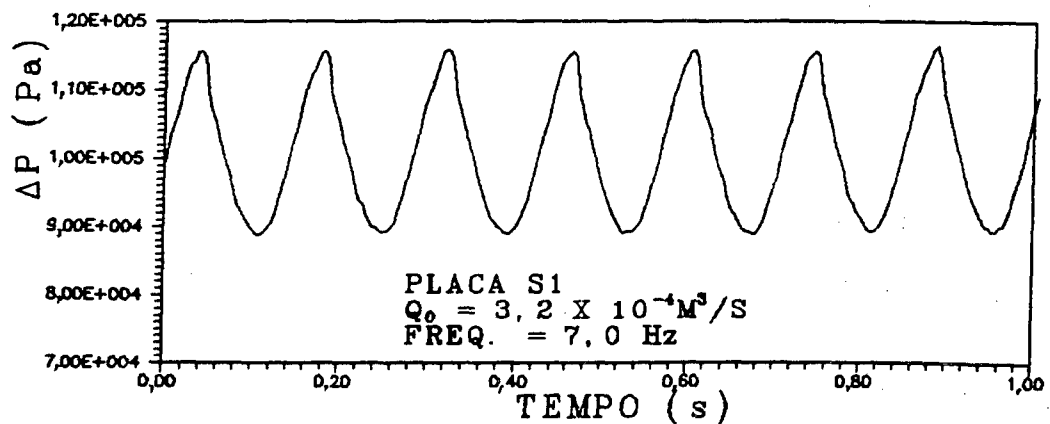


Fig. D.3

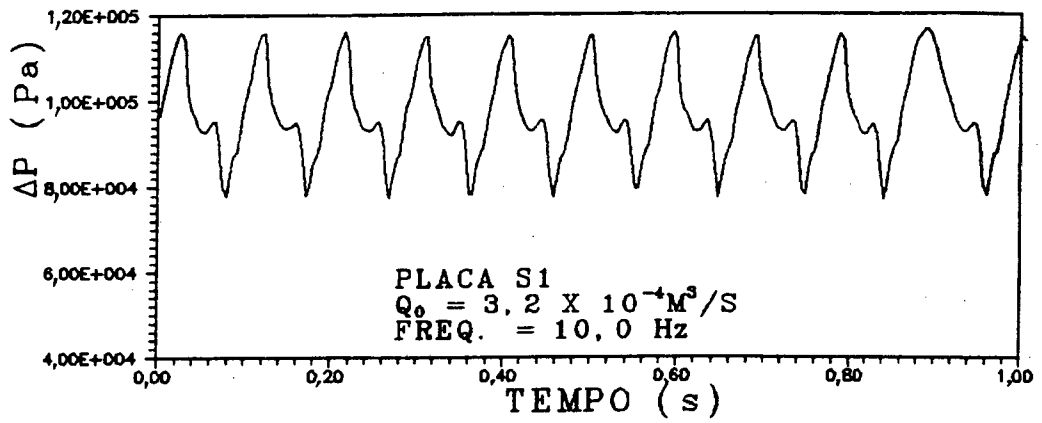


Fig. D.4

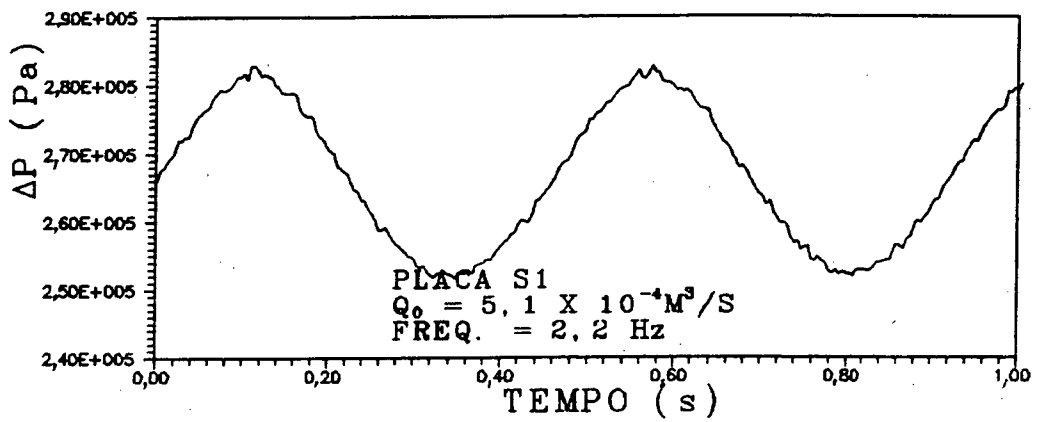


Fig. D.5

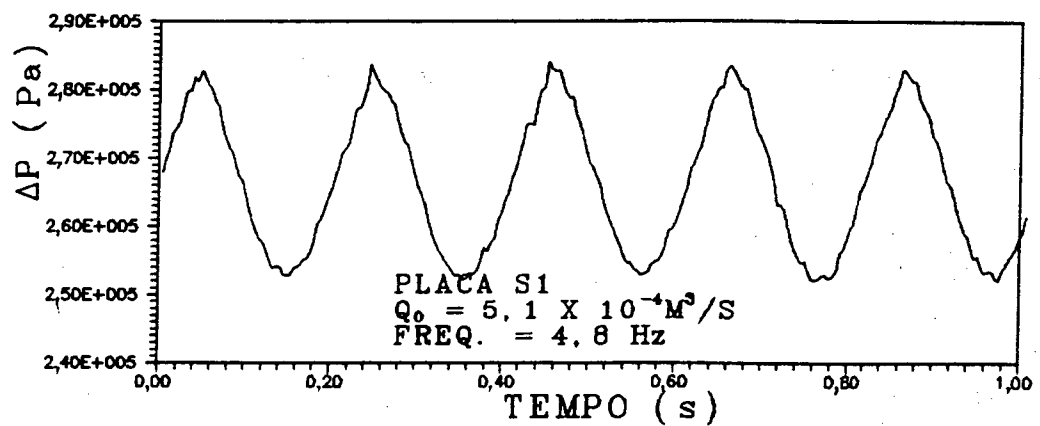


Fig. D.6

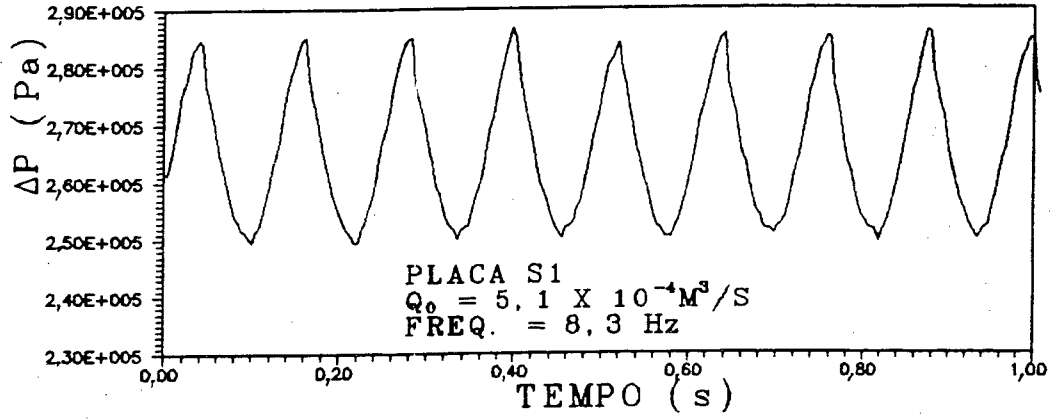


Fig. D.7

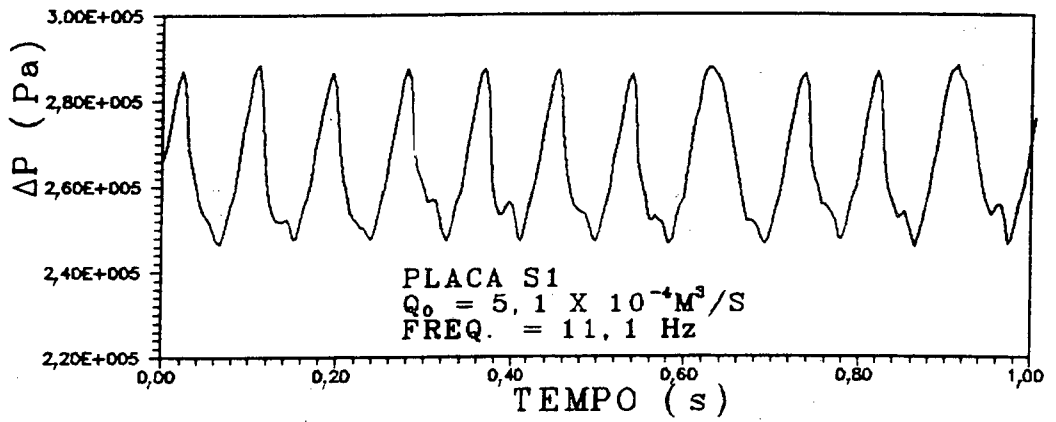


Fig. D.8

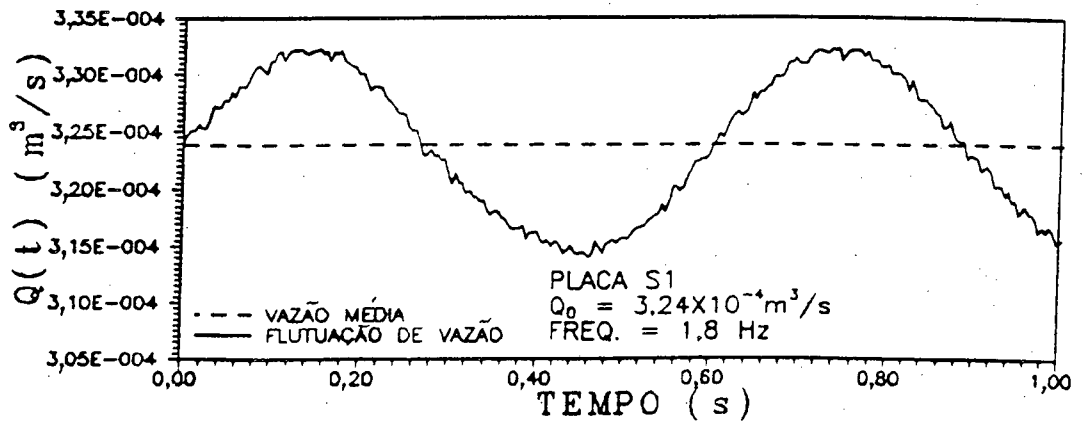


Fig. D.9

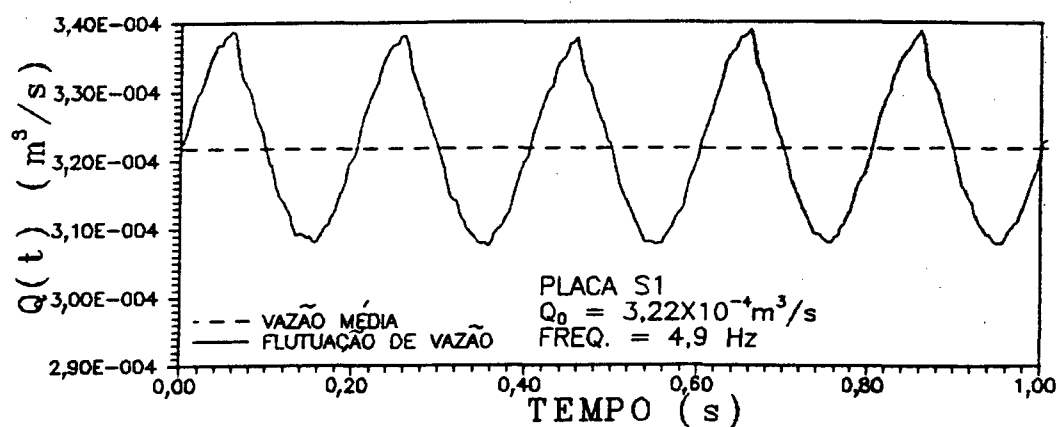


Fig. D.10

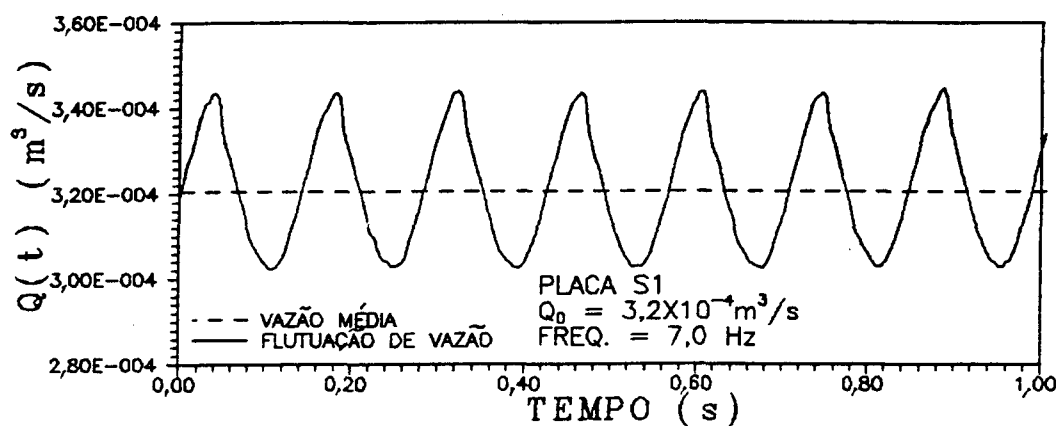


Fig. D.11

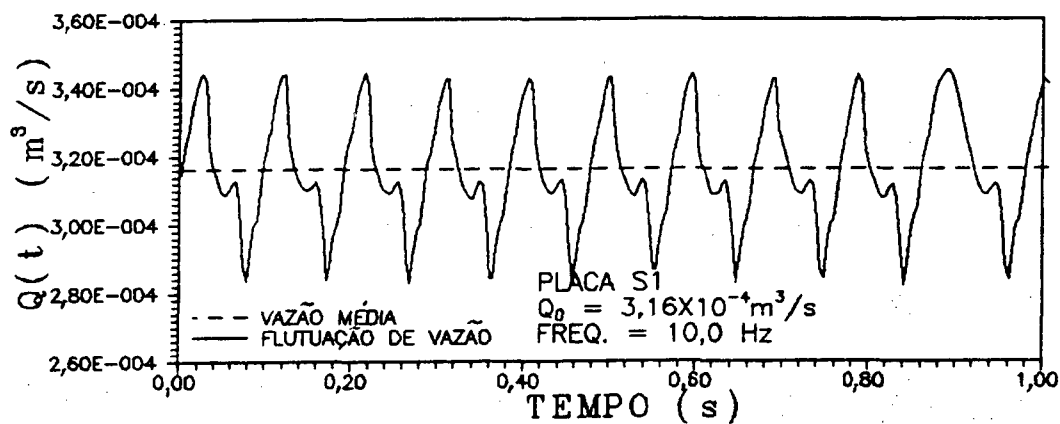


Fig. D.12

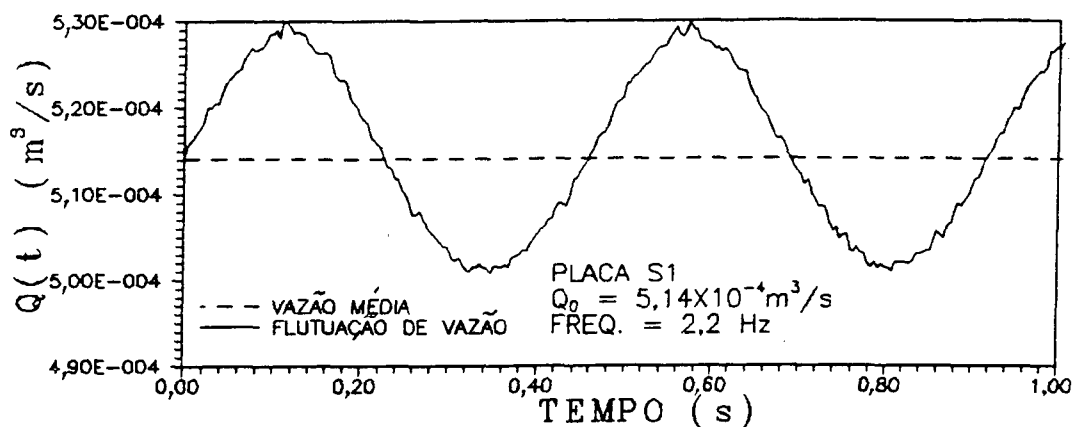


Fig. D.13

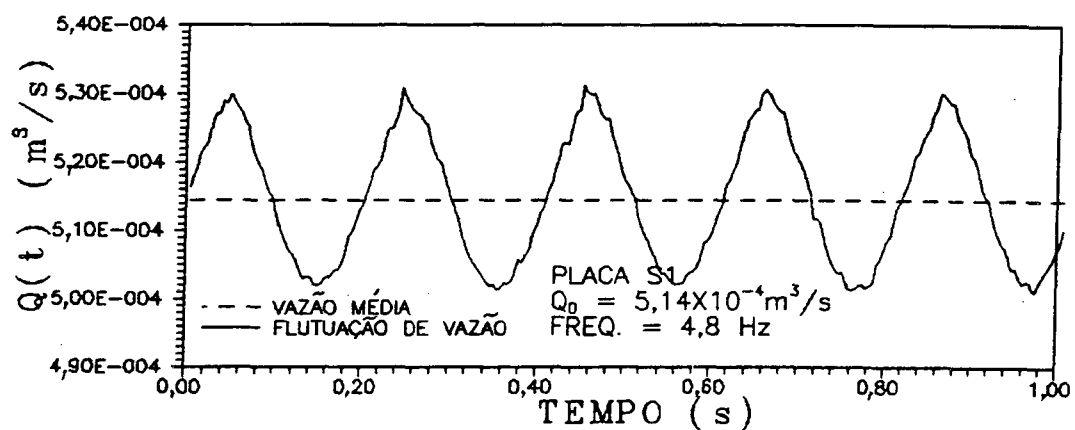


Fig. D.14

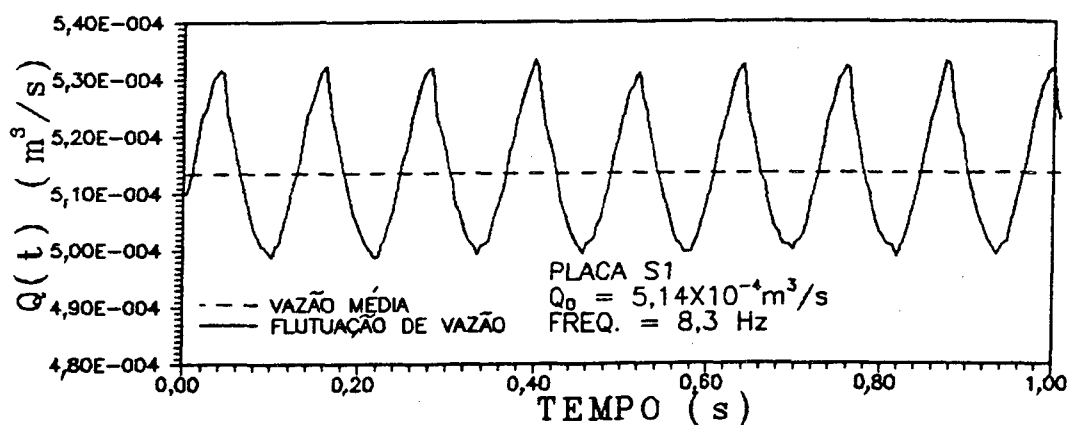


Fig. D.15

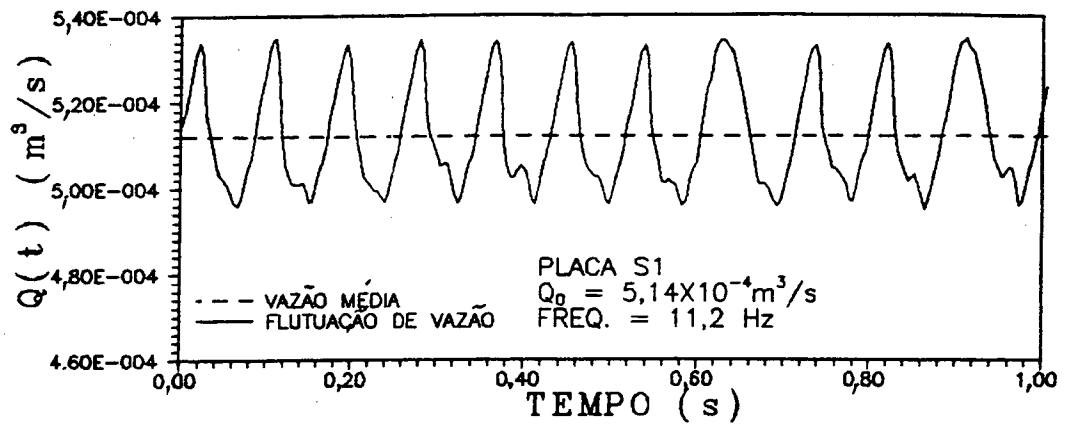


Fig. D.16

D-2) GRADIENTES DE PRESSÃO E VAZÕES TRANSIENTES PARA A PLACA S2

As Figs. D.17 a D.32 mostram estes resultados

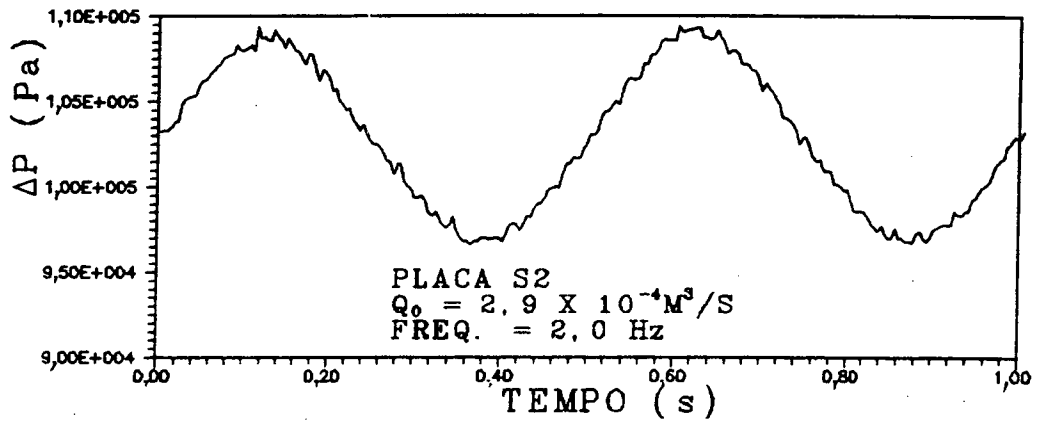


Fig. D.17

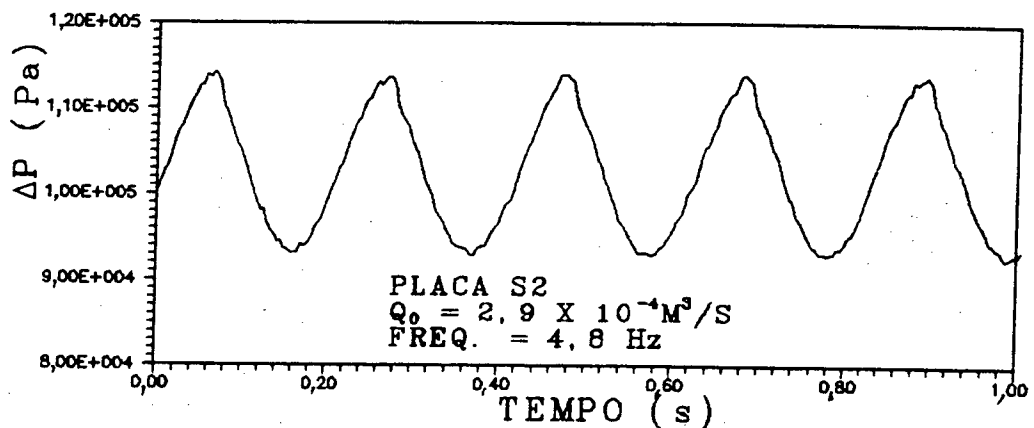


Fig. D.18

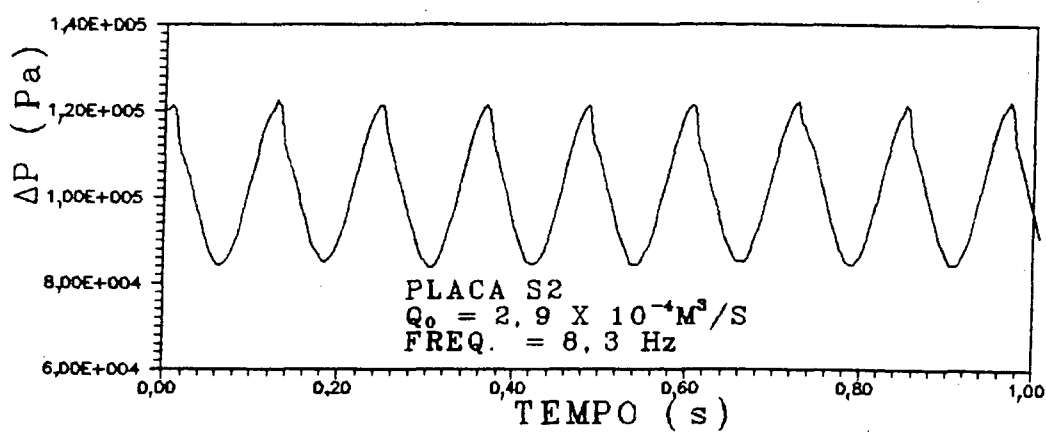


Fig. D.19

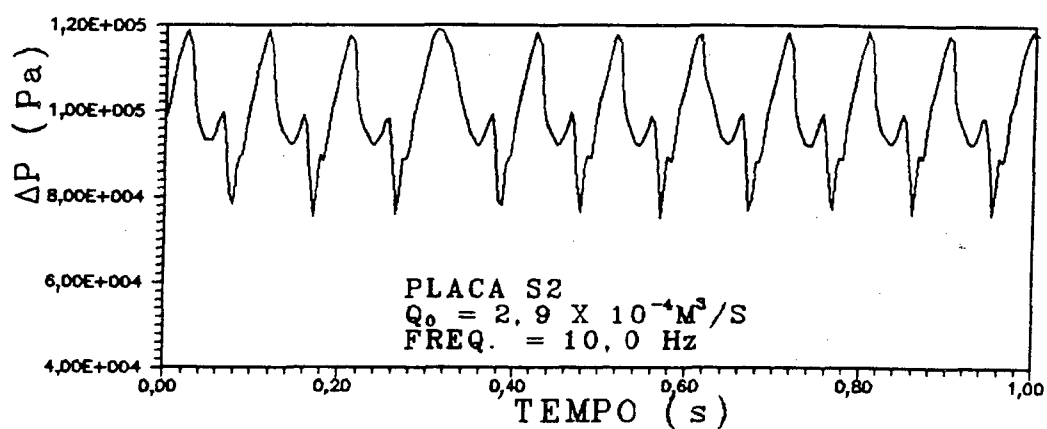


Fig. D.20

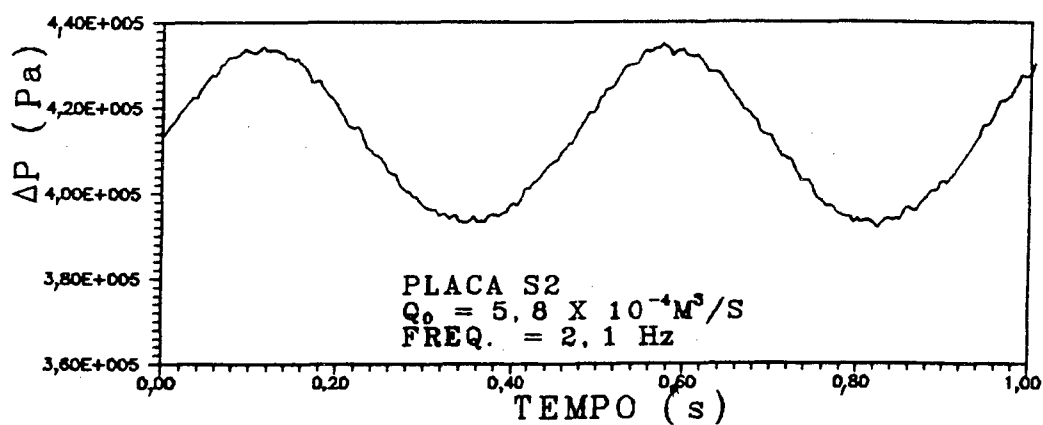


Fig. D.21

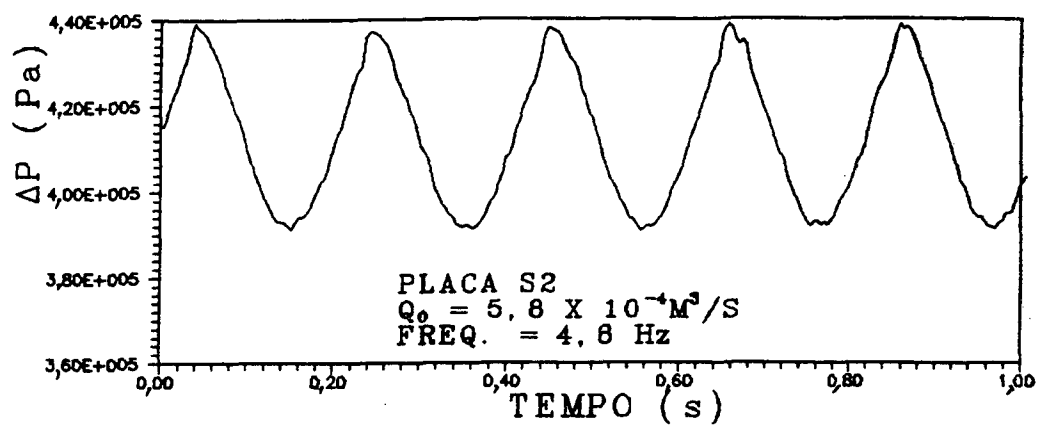


Fig. D.22

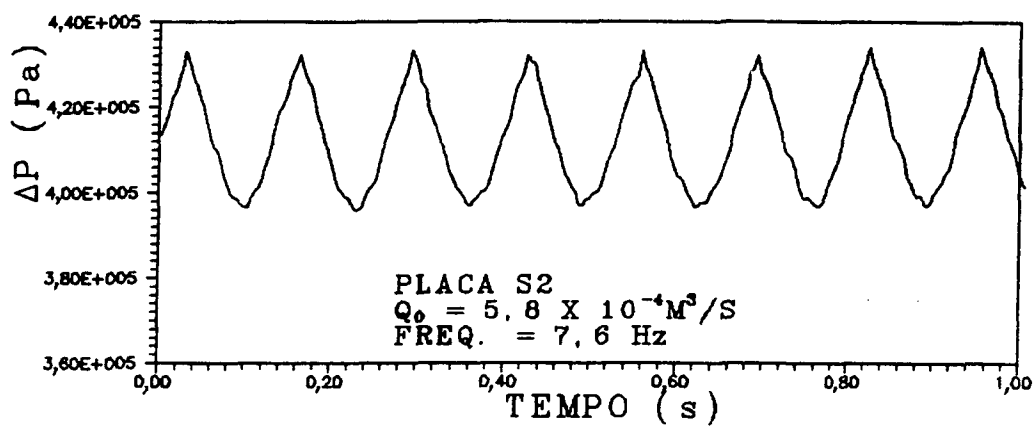


Fig. D.23

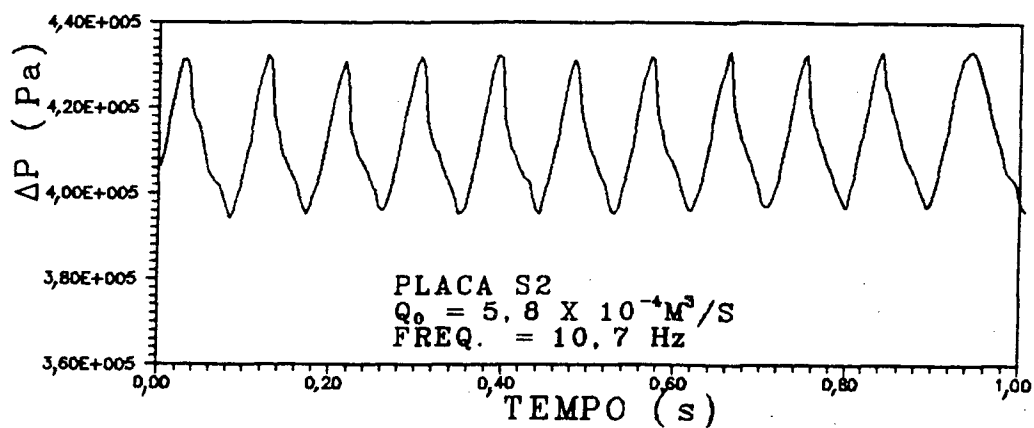


Fig. D.24

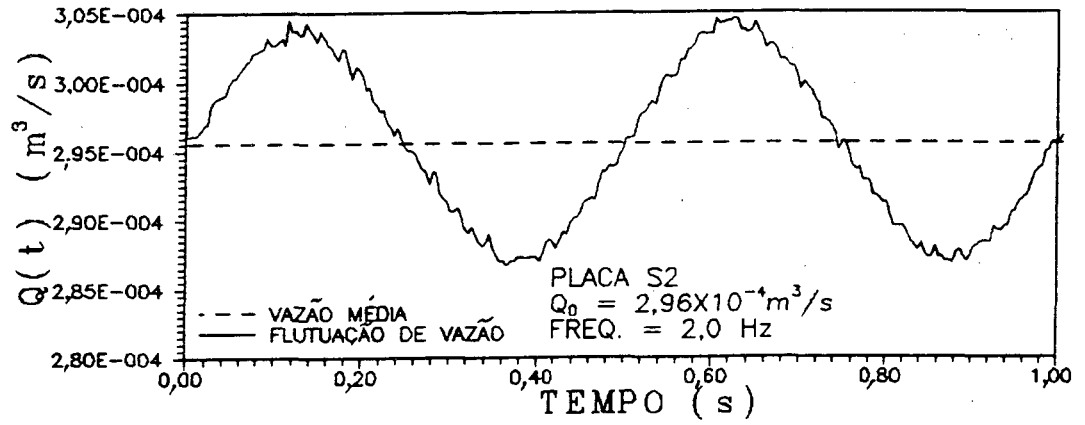


Fig. D.25

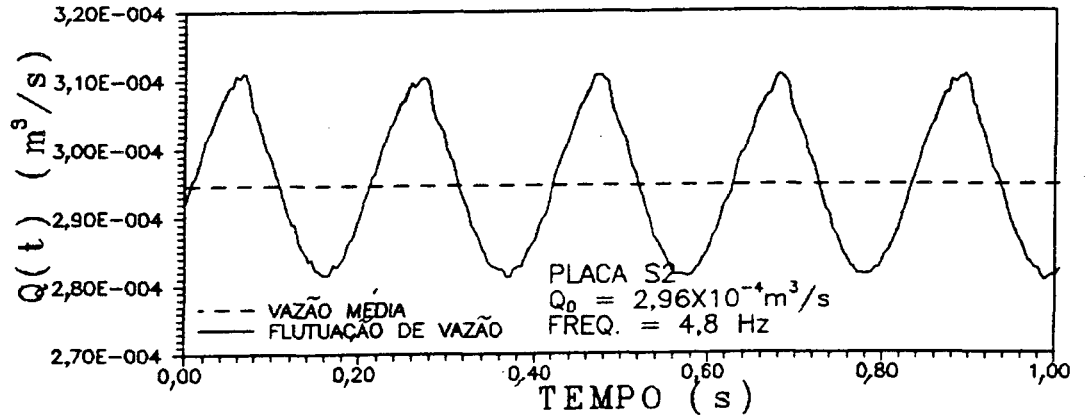


Fig. D.26

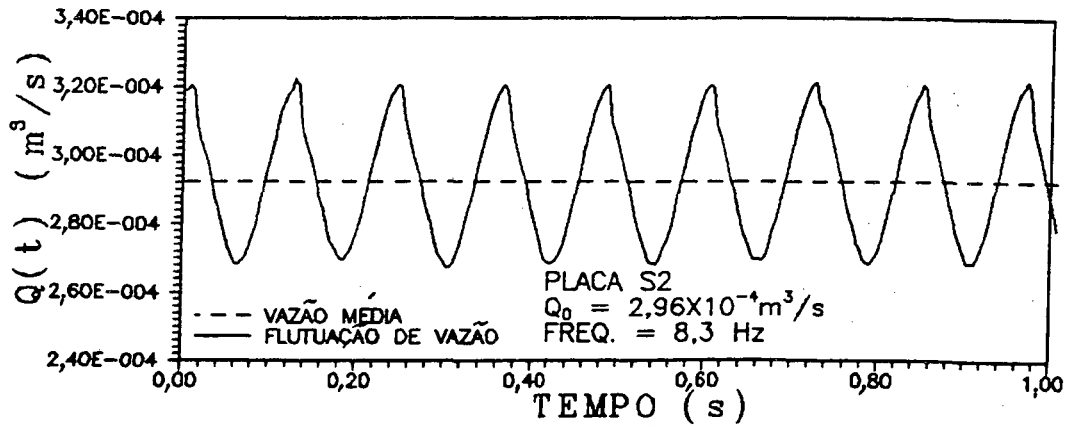


Fig. D.27

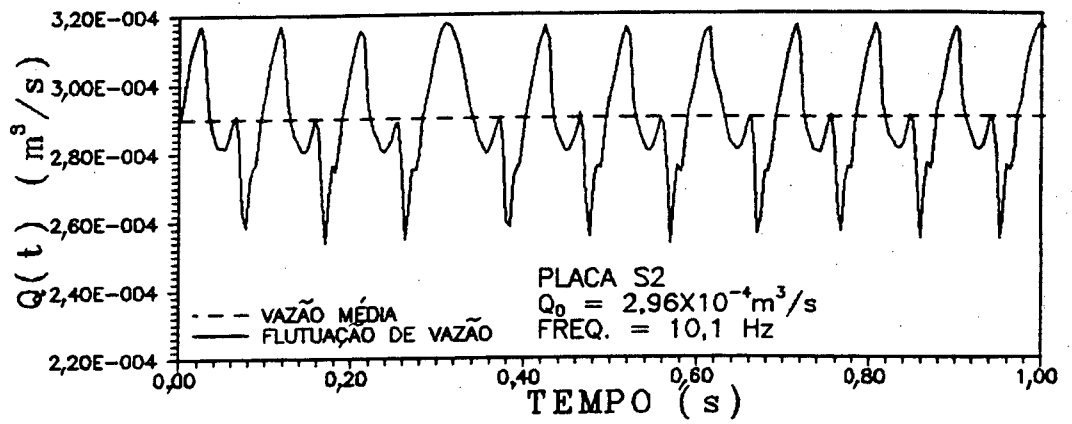


Fig. D.28

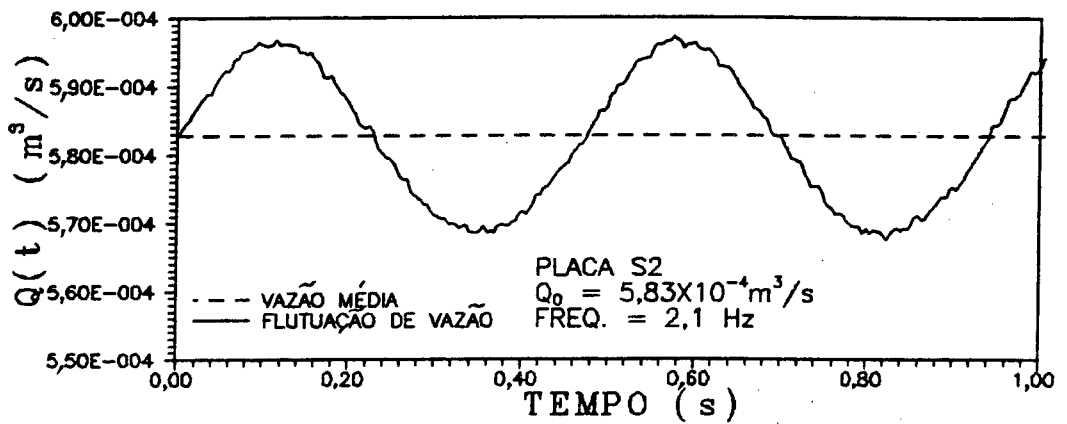


Fig. D.29

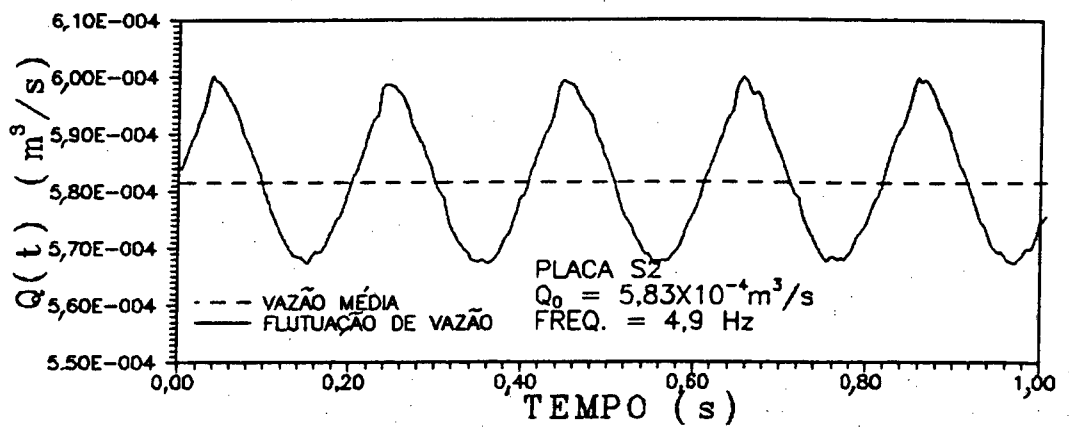


Fig. D.30

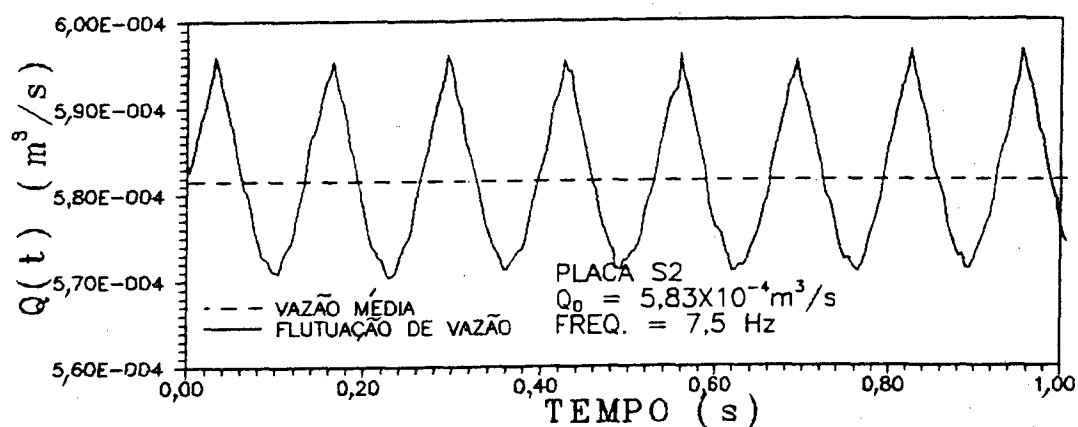


Fig. D.31

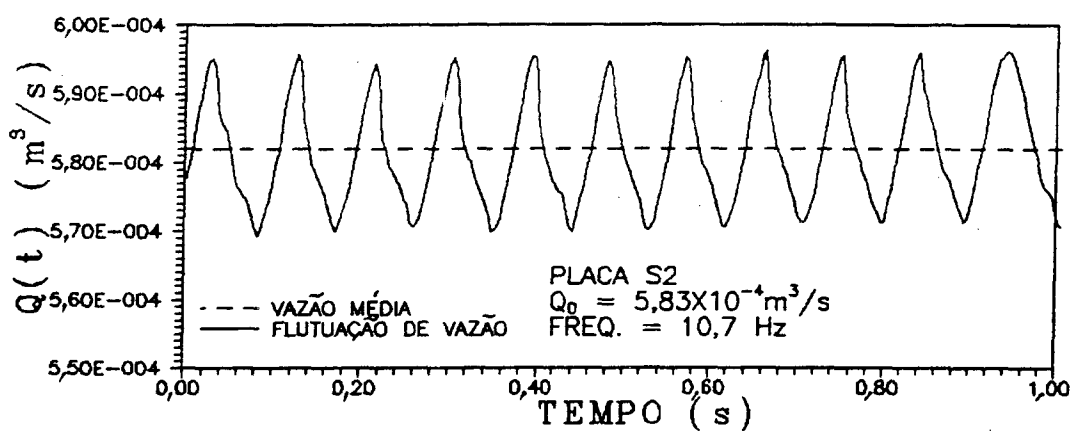


Fig. D.32

D-3) GRADIENTES DE PRESSÃO E VAZÕES TRANSIENTES PARA A PLACA S3.

As Figs. D.33 a D.48 mostram estes resultados

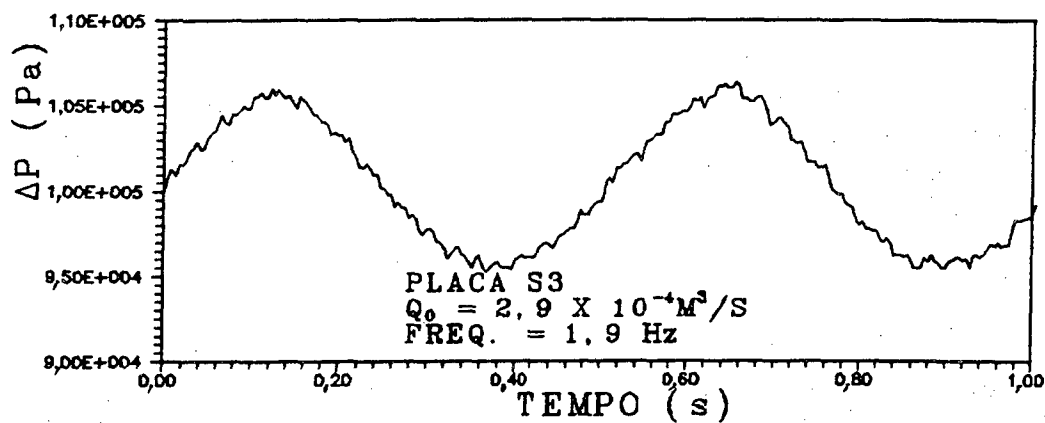


Fig. D.33

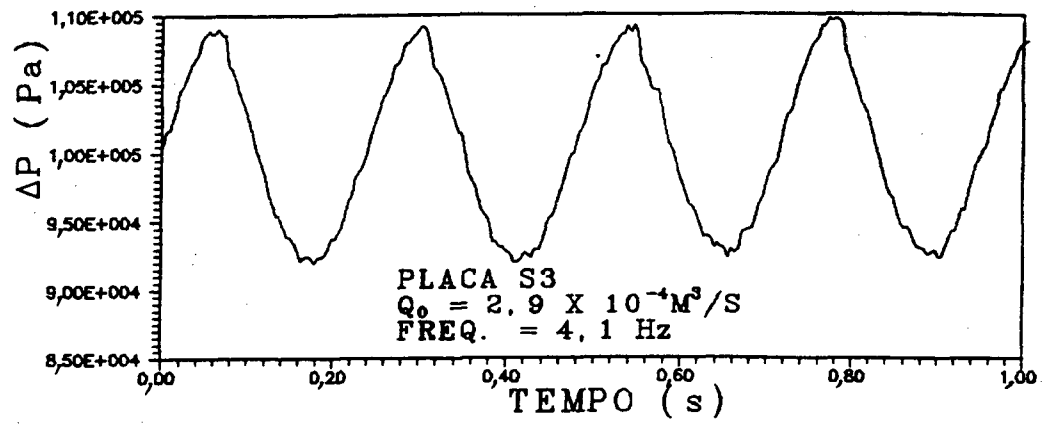


Fig. D.34

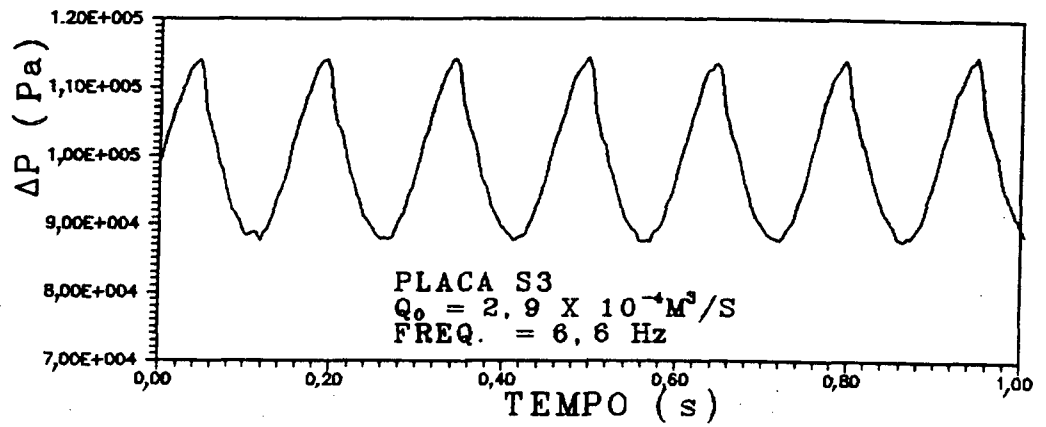


Fig. D.35

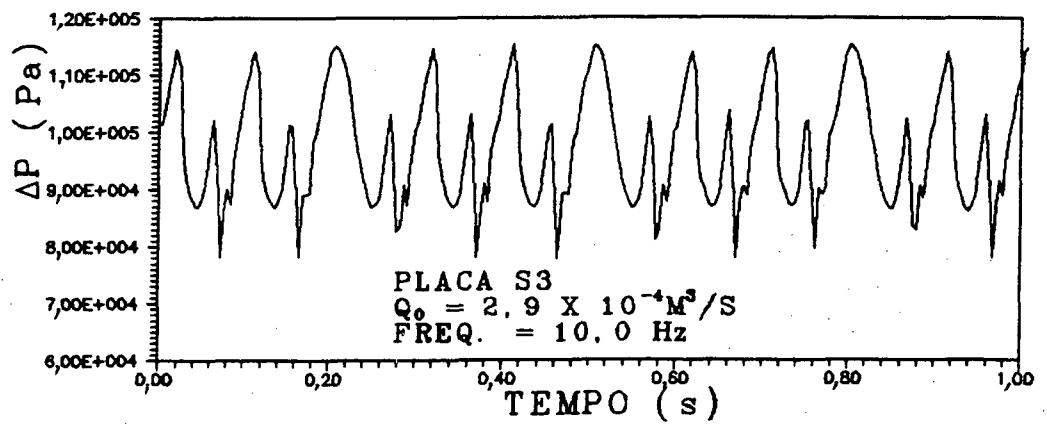


Fig. D.36

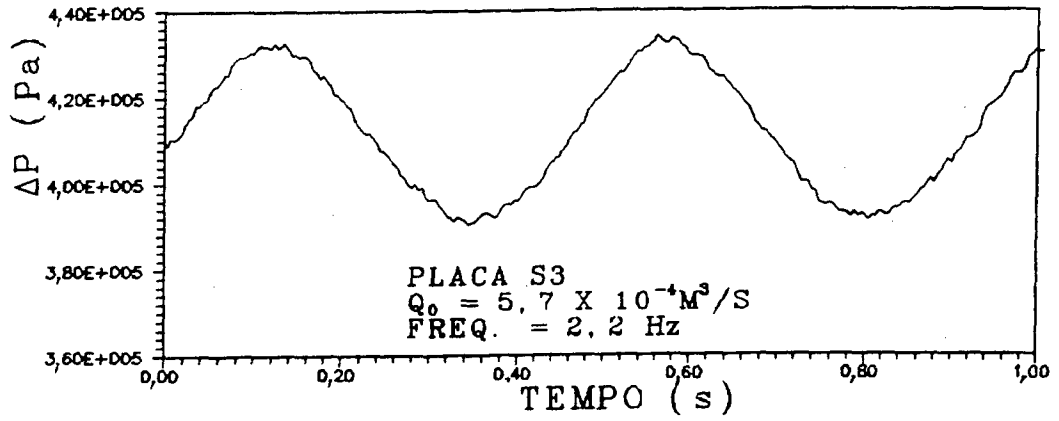


Fig. D.37

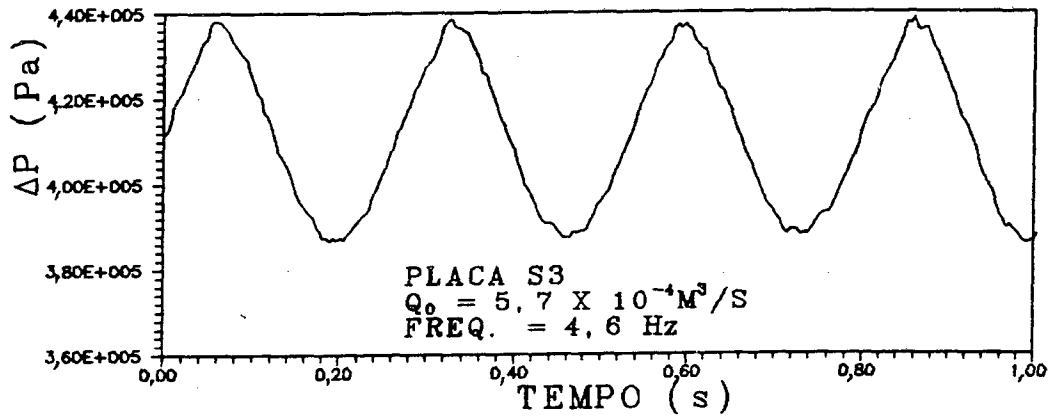


Fig. D.38

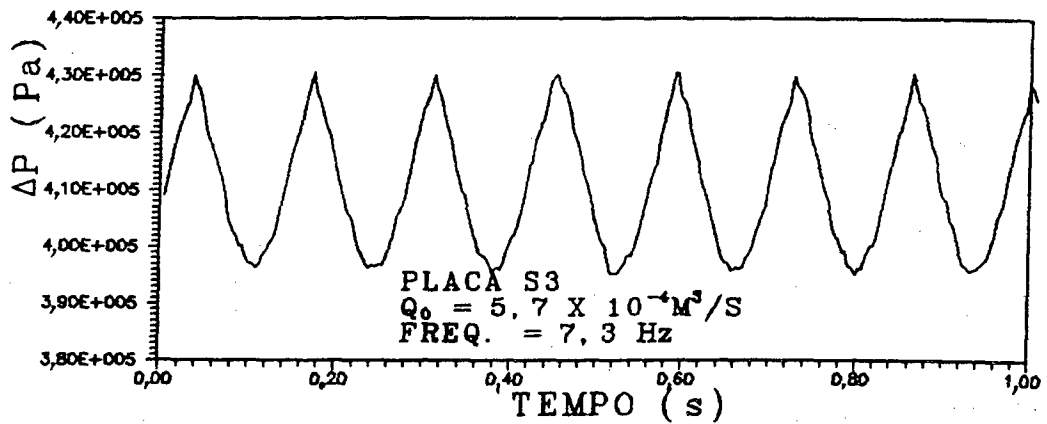


Fig. D.39

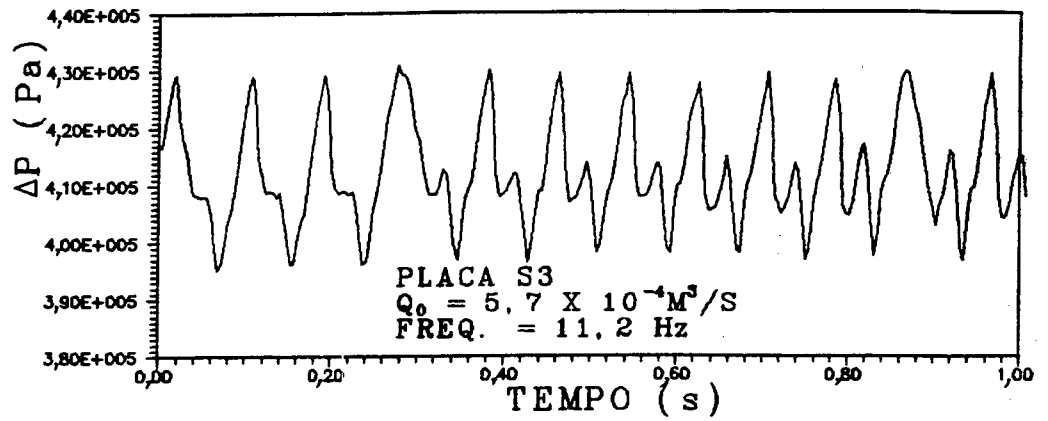


Fig. D.40

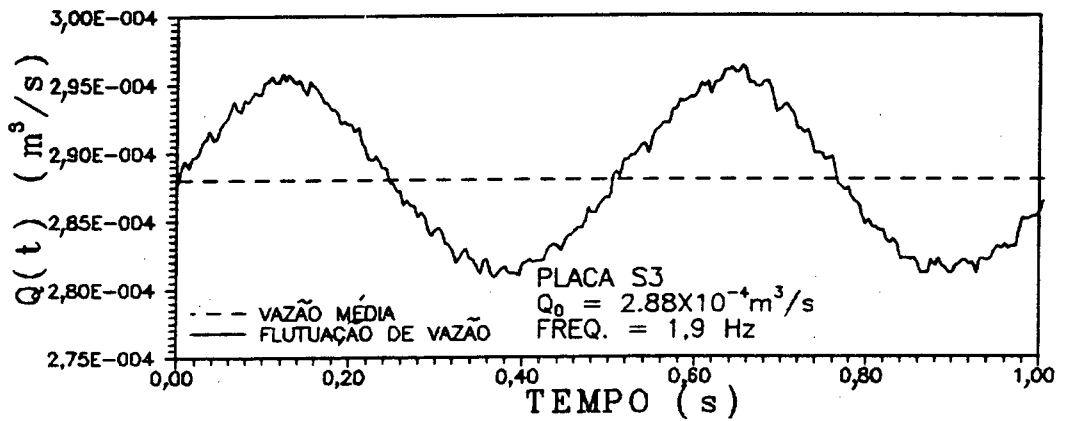


Fig. D.41

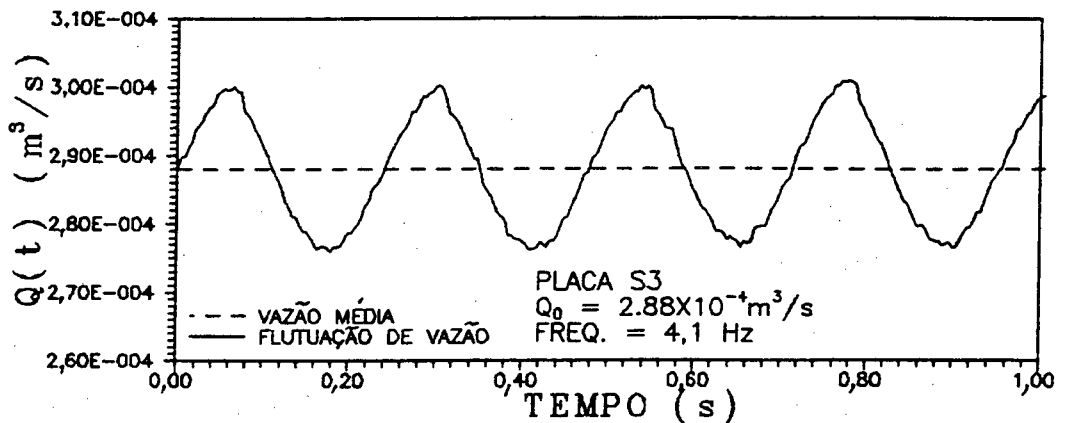


Fig. D.42

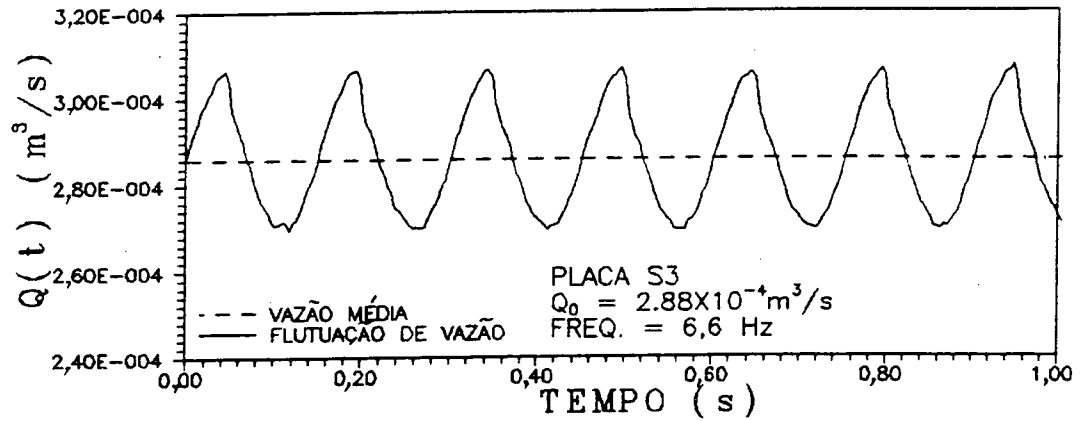


Fig. D.43

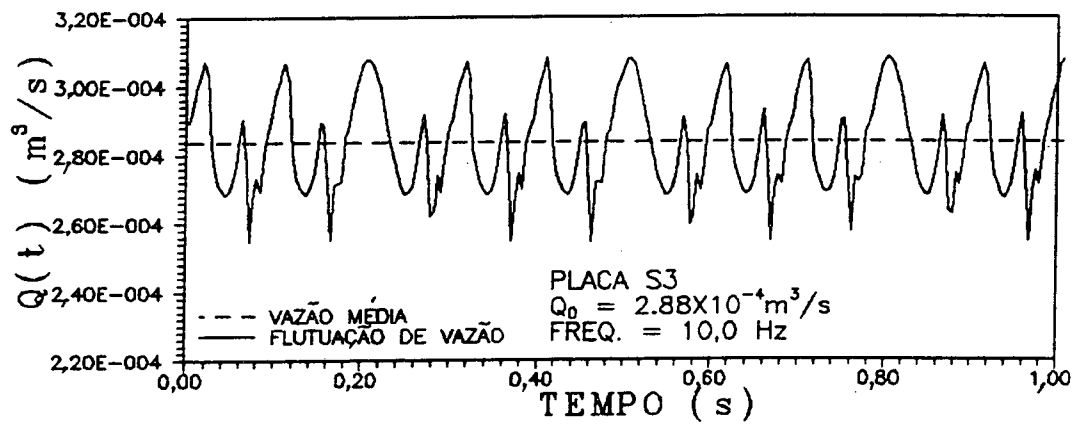


Fig. D.44

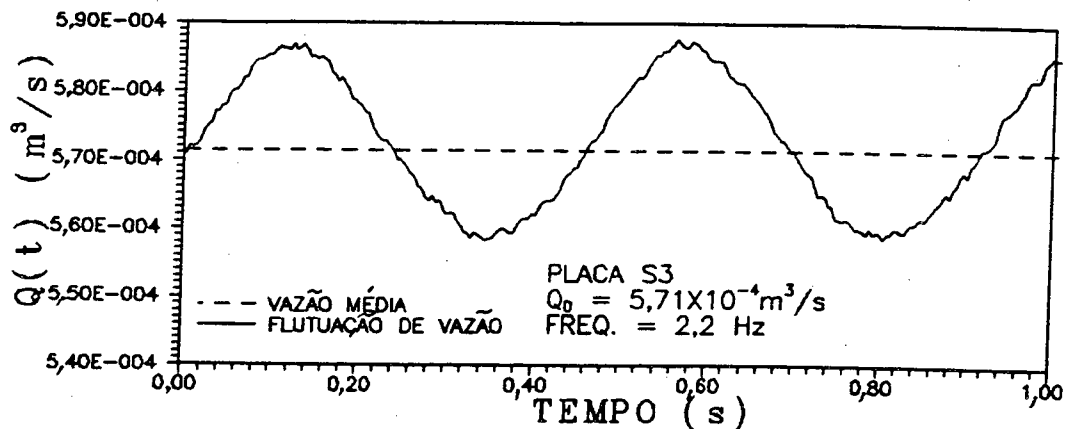


Fig. D.45

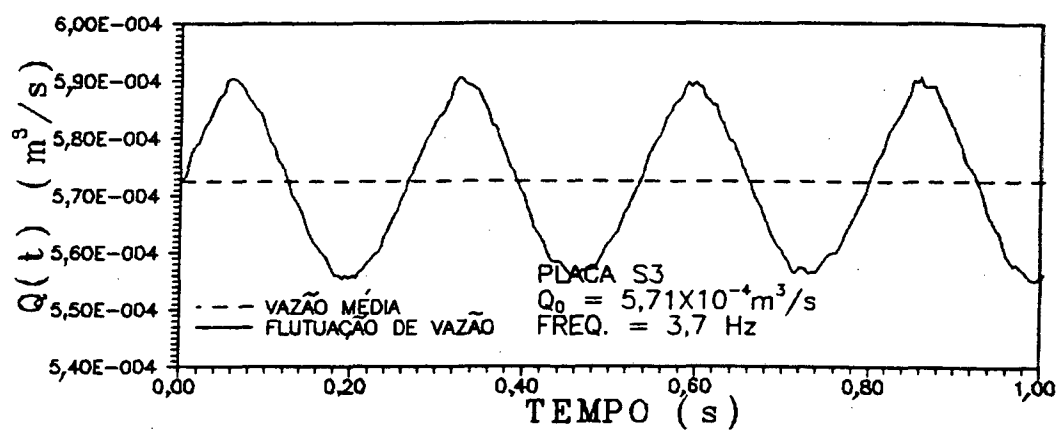


Fig. D. 46

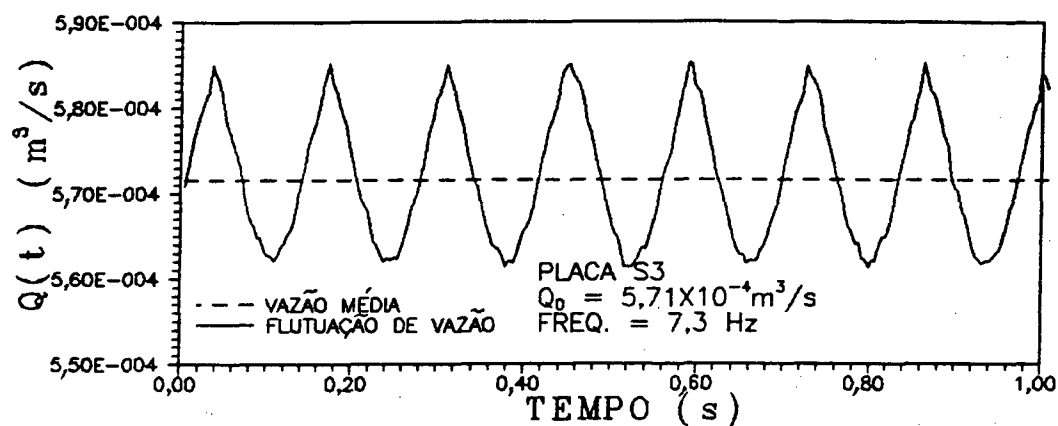


Fig. D. 47

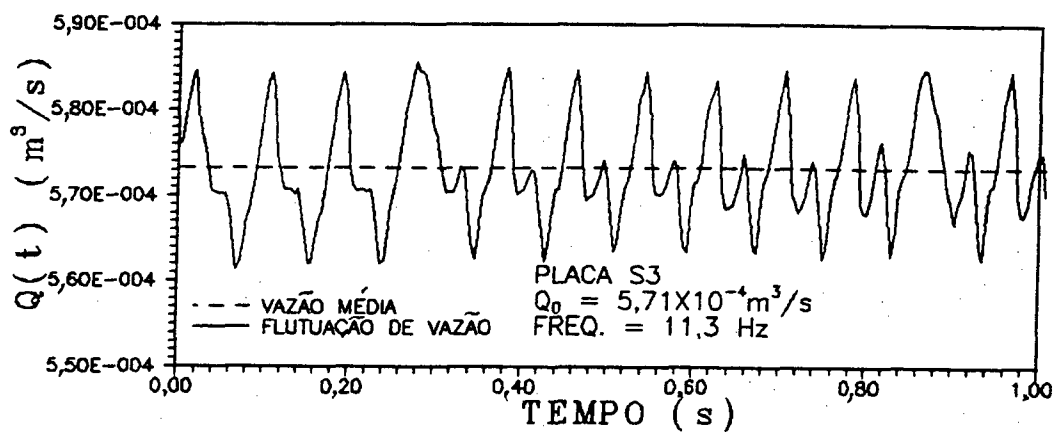


Fig. D. 48

D-4) GRADIENTES DE PRESSÃO E VAZÕES TRANSIENTES PARA A PLACA S4

As Figs. D.49 a D.64 mostram estes resultados

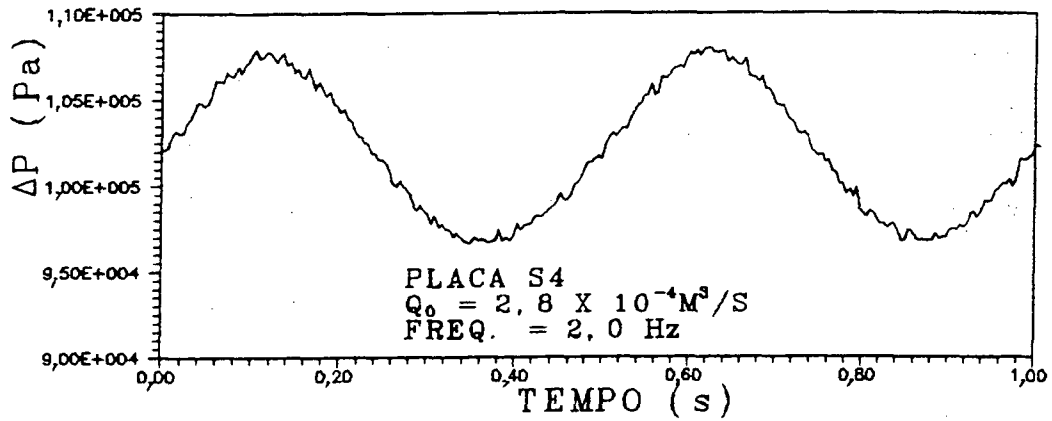


Fig. D.49

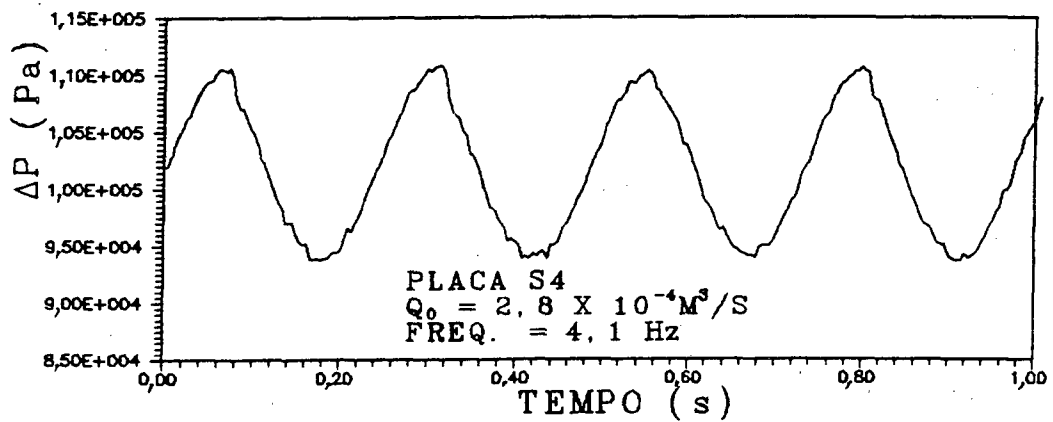


Fig. D.50

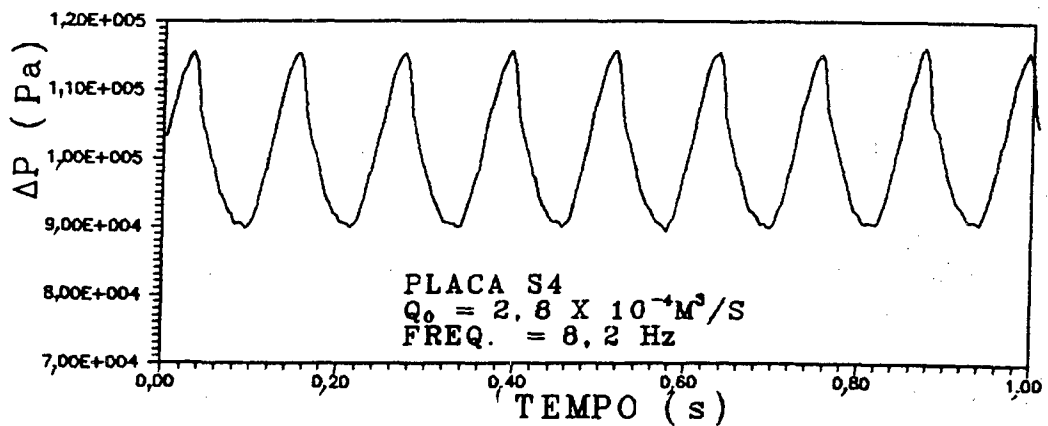


Fig. D.51

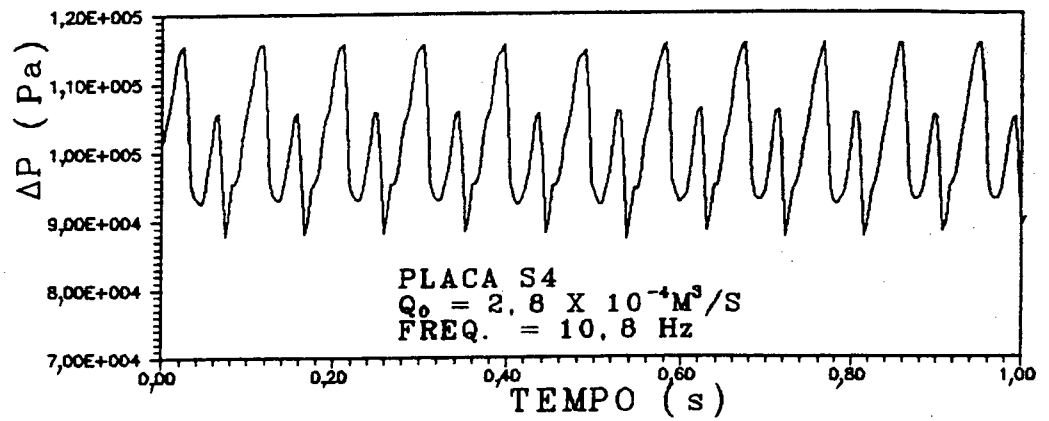


Fig. D.52

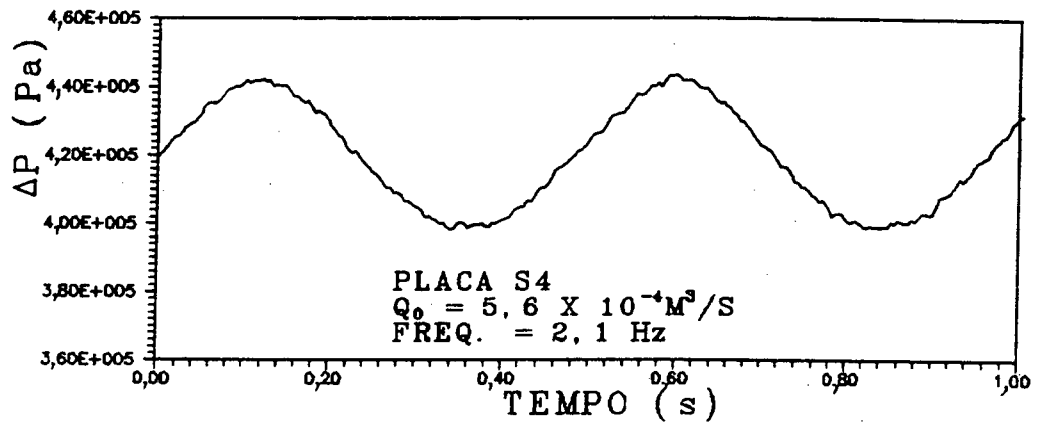


Fig. D.53

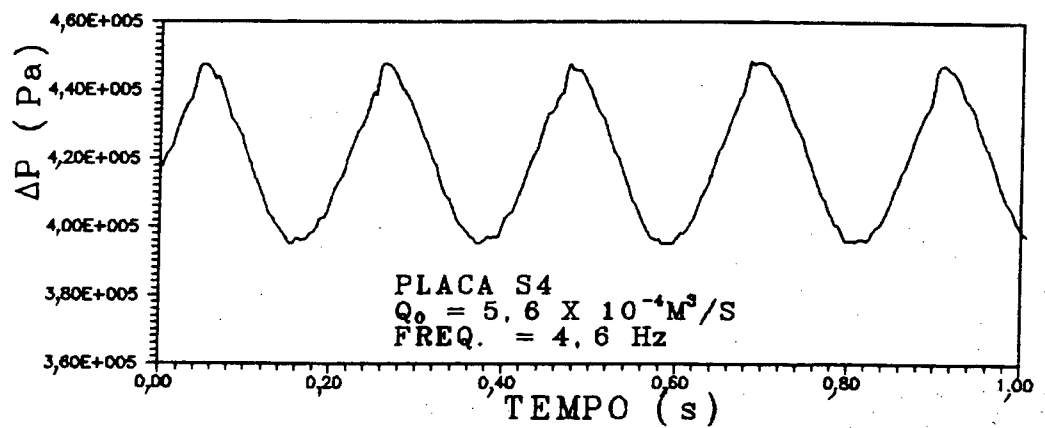


Fig. D.54

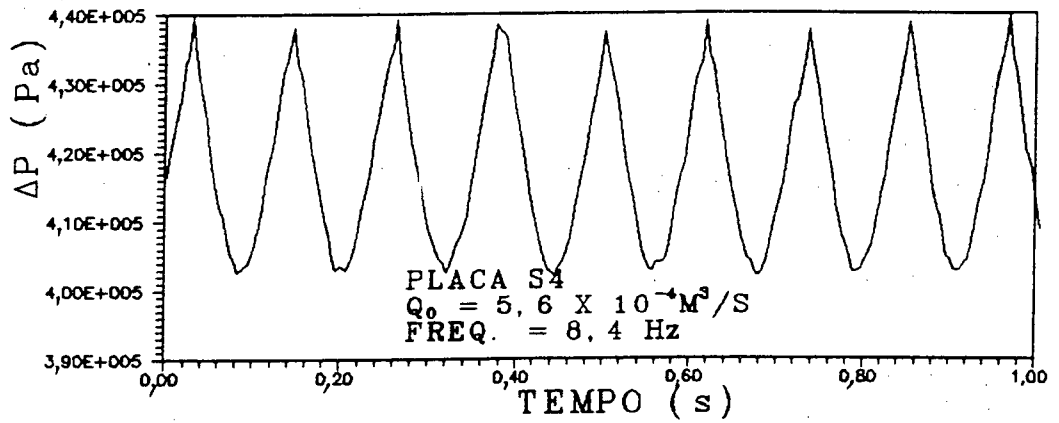


Fig. D.55

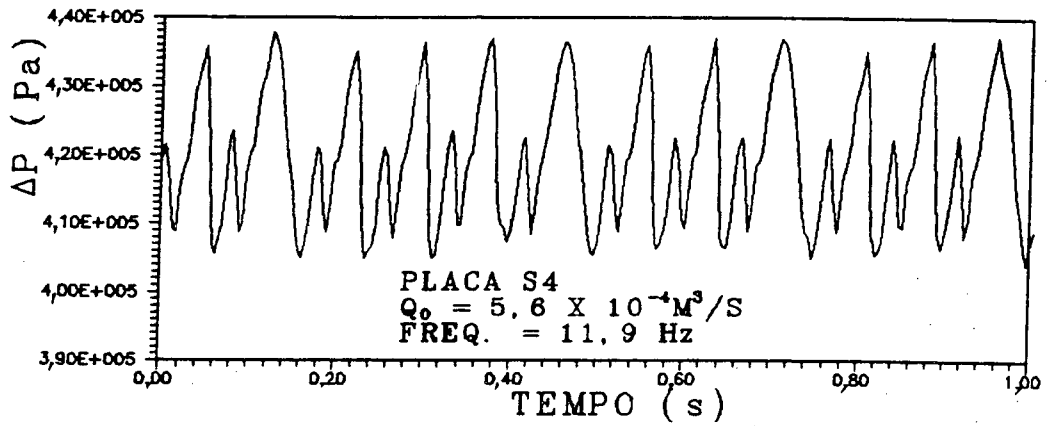


Fig. D.56

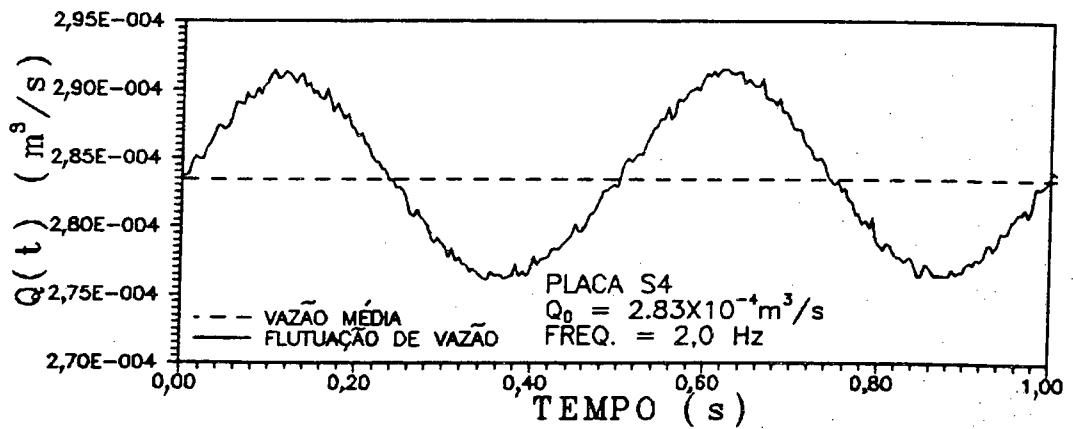


Fig. D.57

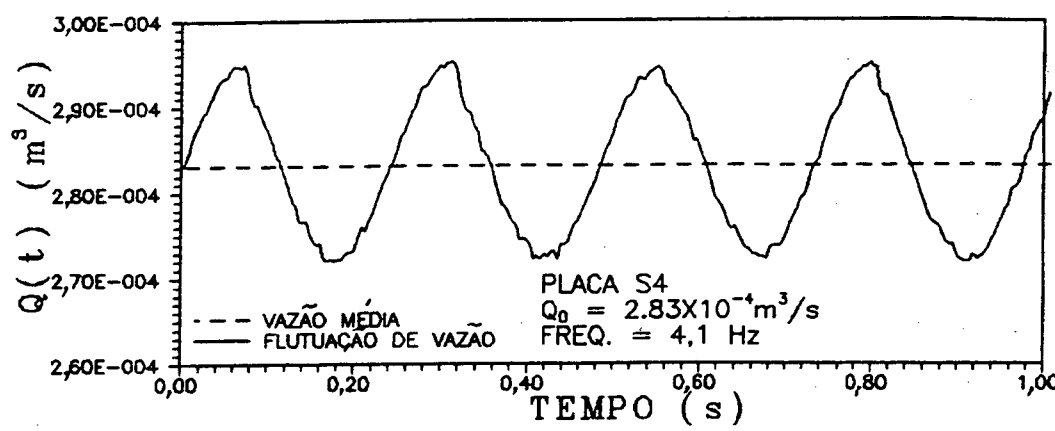


Fig. D.58

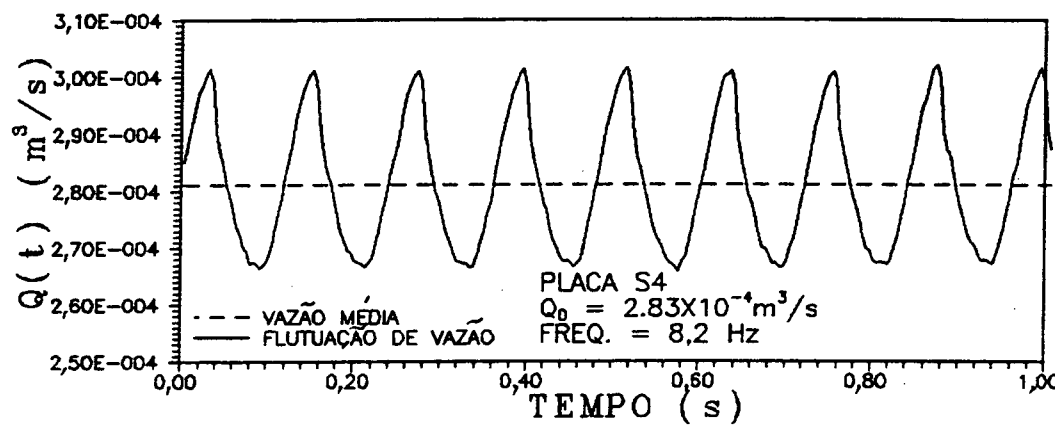


Fig. D.59

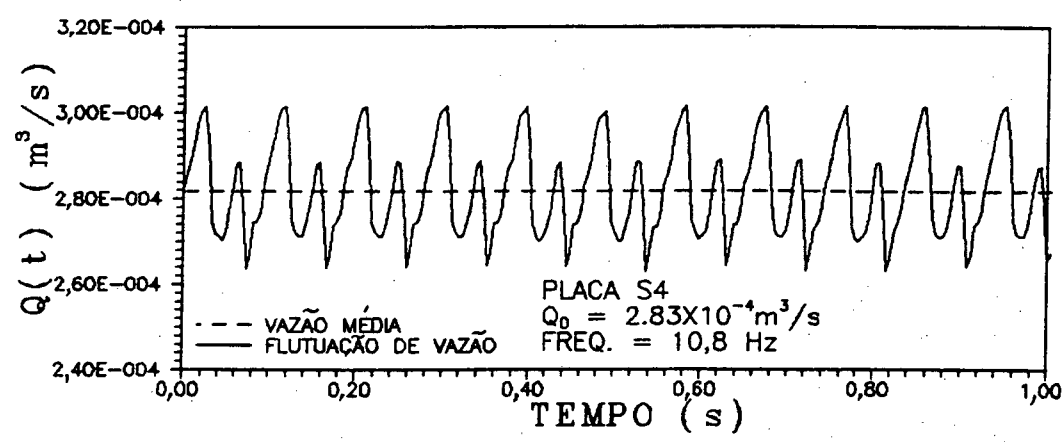


Fig. D.60

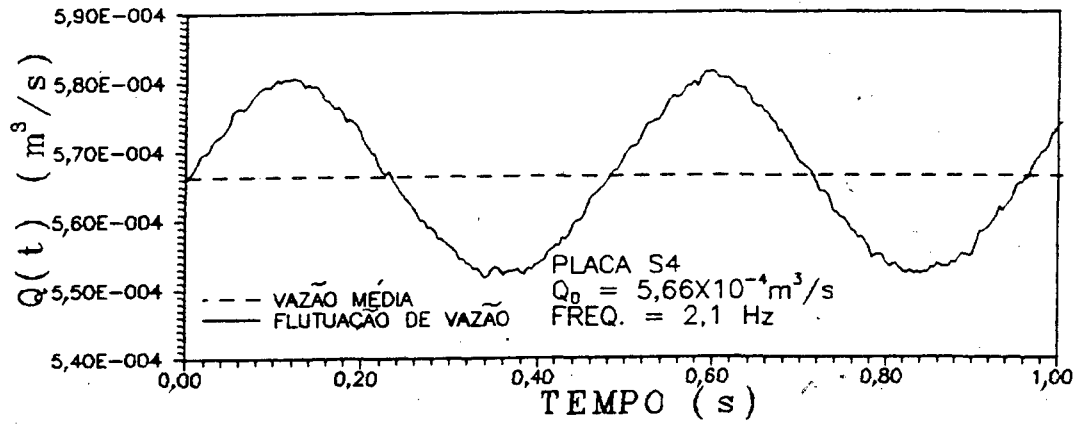


Fig. D.61

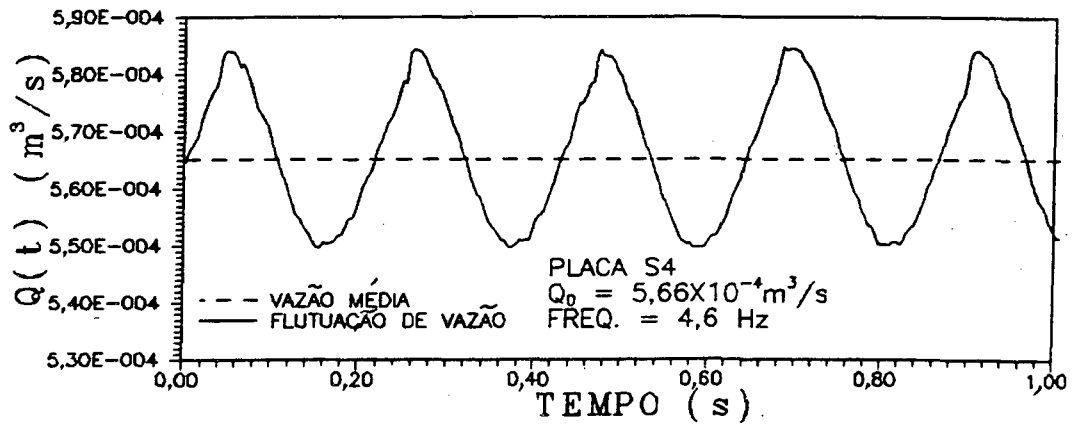


Fig. D.62

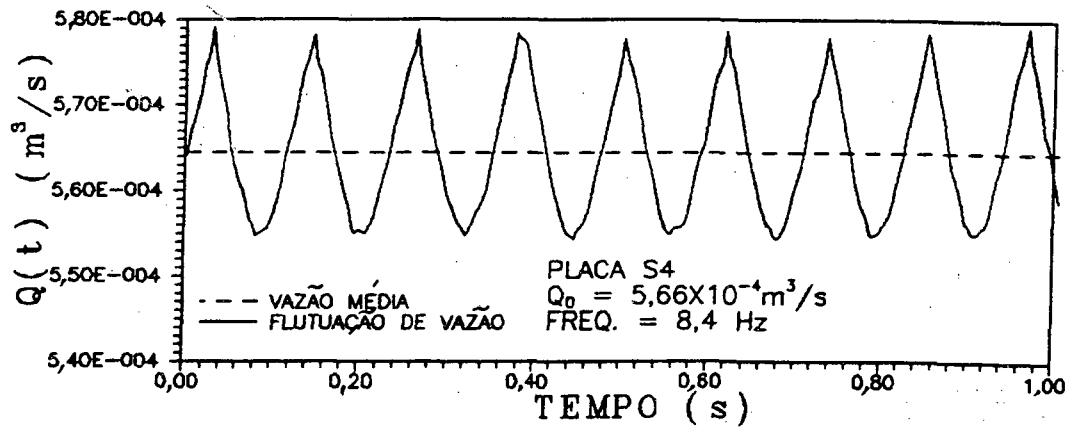


Fig. D.63

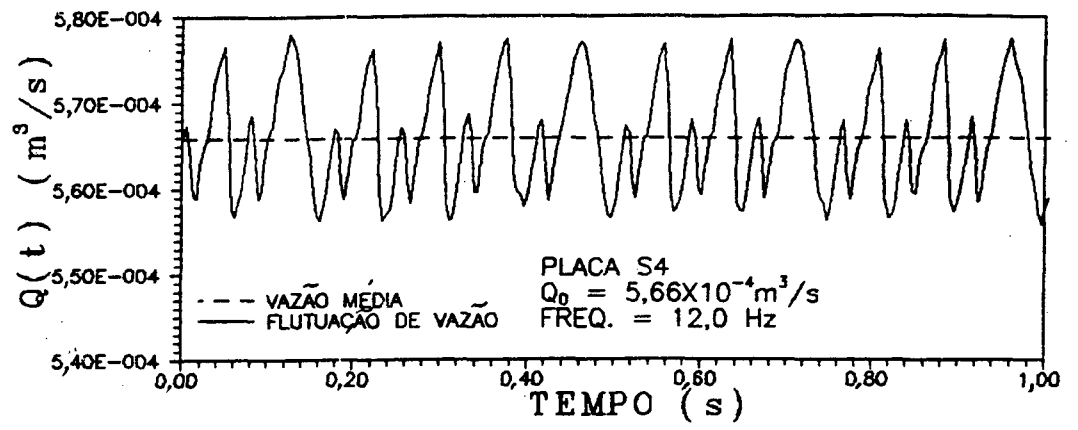


Fig. D.64